

4613
5. FOLGE, 1931, BAND 8, HEFT 3

MAR 14 1931

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 400. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9 und 10 mit je 8 Hefen. Der Abonnements-
preis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung
für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 19. Februar 1931.

Inhalt

	Seite
G. Borelius-Stockholm, Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes ferromagnetischer Metalle. (Mit 2 Figuren)	261
Max Trautz-Heidelberg, Additive Vorausberechnung von Gasmolwärmern	267
Harald Straub-München, Über die Kohärenzlänge des von Kanalstrahlen emittierten Leuchtens. (Bemerkung zu der Erwiderung von E. Rupp)	286
E. Rupp-Berlin, Antwort auf die vorstehende Bemerkung von H. Straub. (Mit 2 Figuren)	293
W. Meyer zur Capellen-Darmstadt, Methode zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen mit Anwendungen auf Schwingungsprobleme. (Mit 12 Figuren)	297
Herbert Murawkin-Berlin, Massenspektren von Gläsern, Salzen und Metallen nebst Konstruktion eines Kreissmassenspektrographen. (Mit 30 Figuren)	353

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

8V

19301

XI

A

5. F

Di

Wid

an a

magn

bis 2

zu w

Wid

einer

chara

tiefer

dann

sieru

wider

verte

ausge

Ich

Chara

verha

tische

wie d

oberh

gesetz

Metal

norm

n. K.

Ann

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1931, BAND 8, HEFT 3

Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes ferromagnetischer Metalle

Von G. Borelius

(Mit 2 Figuren)

Bei reinen nichtferromagnetischen Metallen steigt der Widerstand von etwa 0,2 der charakteristischen Temperatur an angenähert linear mit der Temperatur. Bei den ferromagnetischen Metallen ist dagegen der Anstieg beschleunigt bis zum Curiepunkt, um dann von diesem Punkt an linear zu werden. Die ausgezogene Kurve der Fig. 1 zeigt eine Widerstandstemperaturkurve für Nickel. Johansson¹⁾ hat in einer Studie über den Abmagnetisierungsverlauf diese Kurve so charakterisiert, daß die ferromagnetischen Metalle sich bei tiefen Temperaturen elektrisch normal verhalten, und daß sich dann mit steigender Temperatur und abnehmender Magnetisierung ein Zusatzwiderstand ausbildet, ähnlich dem Zusatzwiderstand in metallischen Mischkristallen ungeordneter Atomverteilung. Im Curiepunkt ist dieser Zusatzwiderstand voll ausgebildet und bleibt bei höheren Temperaturen konstant. Ich habe auch selbst früher vorlesungsweise eine ähnliche Charakterisierung der Sache gegeben. Nach dieser Auffassung verhalten sich somit die ferromagnetischen Metalle im magnetischen Zustand bei hinreichend tiefen Temperaturen normal wie die anderen reinen Metalle, im unmagnetischen Zustand oberhalb des Curiepunktes dagegen anormal.

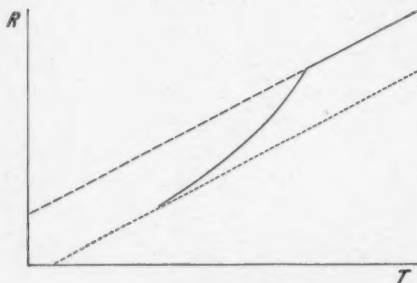
Neulich ist nun aber Gerlach²⁾ zu der gerade entgegengesetzten Auffassung gekommen, daß die ferromagnetischen Metalle oberhalb des Curiepunktes sich wie die anderen Metalle normal verhalten sollten, und daß von dem Curiepunkt an

1) C. H. Johansson, Ann. d. Phys. 84. S. 976. 1927.

2) W. Gerlach, Ztschr. f. Phys. [5] 59. S. 847. 1930; W. Gerlach u. K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 772. 1930.

mit abnehmender Temperatur und zunehmender Magnetisierung eine besondere Widerstandsabnahme, eine „magnetische Supraleitfähigkeit“ eintreten sollte.

Es könnte dem Leser vielleicht scheinen, als sollten sich diese beiden Anschauungen wesentlich nur betreffend Ausdrucksweise und Bezeichnungen unterscheiden. Dies ist aber keineswegs der Fall. Es ist natürlich von sachlichem Interesse, festzulegen, ob die ferromagnetischen Metalle oberhalb des Curiepunktes die normalen elektrischen Eigenschaften reiner Metalle zeigen oder nicht. Es scheint mir deshalb wichtig, zu zeigen, daß die unsrige Auffassung, nicht aber die von Gerlach, mit



Zur Temperaturabhängigkeit des Widerstandes bei Ni

Fig. 1

den allgemeinen Erfahrungen über die Eigenschaften der reinen Metalle im Einklang ist.

Die folgende Kritik der Ansichten von Gerlach berührt indessen nur einen Teil seiner Resultate. Das Hauptresultat seiner Arbeit, eine interessante Beziehung zwischen den Temperaturderivaten des Widerstandes und des Magnetisierungsquadrates unterhalb des Curiepunktes, bekommt vielmehr durch die folgenden Überlegungen eine weitere Stütze.

Schon die Darstellung des Widerstandes von Nickel (in der Fig. 1) als Funktion der absoluten Temperatur statt der von Gerlach benutzten Celsius-Temperatur entscheidet sogleich qualitativ zugunsten unserer Auffassung. Die voll ausgezogene Kurve ist die Widerstandskurve für Nickel, wie sie aus den Messungen von Gerlach und Schneiderhan in qualitativer

Übereinstimmung mit Messungen anderer Autoren¹⁾ hervorgeht. Von dem Curiepunkt aufwärts ist die Kurve geradlinig. Die gestrichelte Fortsetzung dieser Geraden nach unten gibt nach der Bezeichnungsweise Gerlachs die „normalen“ Widerstandswerte R_{normal} . Zwischen den beobachteten Widerständen R und den „normalen“ besteht, wie Gerlach und Schneiderhan²⁾ durch Messungen im Temperaturgebiete um den Curiepunkt gezeigt haben, mit guter Annäherung die Beziehung

$$(1) \quad R = R_{\text{normal}} - c \cdot \sigma^2,$$

wo σ die spontane Magnetisierung pro Gramm und c eine empirische Konstante ist. Das Glied $c \cdot \sigma^2$ wird von Gerlach als anormale, magnetische Widerstandsabnahme aufgefaßt. Man sieht nun aber sogleich, daß die Kurve für R_{normal} nicht die charakteristischen Eigenschaften der Widerstandskurven reiner Metalle aufweist. Sie schneidet die $T = 0$ -Achse auf der positiven Seite, während die Fortsetzung der Kurven für nicht ferromagnetische reine Metalle immer diese Achse auf der negativen Seite schneiden. Die R_{normal} -Kurve hat denselben Verlauf wie die Widerstandskurven typischer Mischkristalllegierungen.

Es ist dagegen möglich, als Fortsetzung der wahren Widerstandskurve der tiefsten Temperatureine mit der R_{normal} -Kurve parallele Gerade einzulegen (in der Figur punktiert), die qualitativ mit der Form der Widerstandskurven reiner Metalle übereinstimmt. Wir wollen die Widerstandswerte dieser Kurve als reduzierte Widerstände, $R_{\text{reduz.}}$, bezeichnen. Die wahren Widerstände setzen sich aus den reduzierten und einem Zusatzwiderstand zusammen. Unter Ausnutzung der empirischen Abhängigkeit des Widerstandes von der Magnetisierung schreiben wir dies

$$(2) \quad R = R_{\text{reduz.}} + c(\sigma_0^2 - \sigma^2),$$

wo σ_0 die spontane Magnetisierung am absoluten Nullpunkt

1) Vgl. u. a. L. Holborn, Tabellen von Landolt-Börnstein, Roth-Scheel, 5. Aufl., S. 1050; F. Shofield, Res. Nat. Phys. Lab. 19. S. 56. 1926 und W. Gerlach, a. a. O.

2) Die Sache soll nach Angabe dieser Autoren zuerst von B. Cabrera, Ann. Soc. Esp. 1919 aufgewiesen sein.

bezeichnet. Für Nickel ist nach Weiss und Kamerlingh Onnes¹⁾ $\sigma_0 = 57,6 \text{ m.e.-gram}$.

Es ist nun weiter von Interesse, nachzuprüfen, inwieweit die nach (2) berechneten reduzierten Widerstandswerte $R_{\text{reduz.}}$ auch quantitativ der für reine, nichtferromagnetische Metalle geltenden Temperaturabhängigkeit folgen. Für diese Metalle gelten bei mäßig hohen Temperaturen, wenn R_T und R_Θ die Widerstände bei der absoluten Temperatur T und bei der charakteristischen Temperatur Θ bedeuten, mit guter Annäherung

$$(3) \quad \frac{R_T}{R_\Theta} = F\left(\frac{T}{\Theta}\right),$$

wo F eine universelle Funktion ist. Im Temperaturgebiet von $\frac{T}{\Theta} = 0,2$ bis etwa 2, oder für manche Metalle noch höher, gilt angenähert:

$$(4) \quad F\left(\frac{T}{\Theta}\right) = -0,17 + 1,17 \frac{T}{\Theta}.$$

Mit dem von Simon²⁾ für Nickel angegebenen Wert $\Theta = 370$ berechnen sich aus den Widerstandswerten von Gerlach und Schneiderhan für $R_{\text{reduz.}}$ in der Gleichung für $F(T/\Theta)$ die Konstanten zu $-0,25$ und $1,25$. Die Übereinstimmung mit (4) ist somit recht gut, aber doch keine vollkommene.

Es lag indessen nahe an der Hand, zu vermuten, daß diese unvollkommene Übereinstimmung mit den ziemlich großen Verunreinigungen des Gerlach'schen Nickels zusammenhängen könnte. Gerlach gibt einen Gehalt an Mangan von 0,6 Proz. an, und das Verhältnis der Widerstände bei 100 und 0°C ist nur etwa 1,53 gegen 1,675 bei dem reinsten von Holborn³⁾ untersuchten Nickel. Ich habe deshalb auch die Resultate Holborns für die reinste Probe, Ni I, einer Prüfung unterworfen. Vorausgesetzt, daß die reduzierten Widerstände $R_{\text{reduz.}}$

1) P. Weiss u. H. Kamerlingh Onnes, Journ. de Phys. 9. S. 555. 1910.

2) F. Simon, Tabellen von Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, 5. Aufl., Ergänzungsband, S. 707.

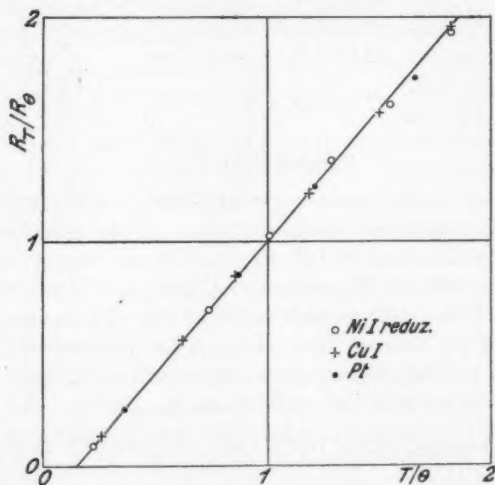
3) L. Holborn, a. a. O.

linear mit der Temperatur anwachsen, können wir Gleichung (2) auch schreiben

$$(5) \quad R_{\text{reduz.}} = R - c(\sigma_0^2 - \sigma^2) = a + b T,$$

wo a und b Konstanten sind.

Wir setzen hierin hinein: für R die Werte von $r = \frac{R_T}{R_{273}}$, die Holborn für die absoluten Temperaturen 81, 273, 373, 473, 573 und 673 angibt, für σ die Werte nach Weiss und Forrer¹⁾



Zu den Überlegungen auf S. 266

Fig. 2

und für σ_0 den Wert 57,6 nach Weiss und Kamerlingh-Onnes²⁾ und bekommen so die Observationsgleichungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0,1039 & = a + 81b \\ 1,0000 - 289 & c = a + 273b \\ 1,6746 - 657 & c = a + 373b \\ 2,5385 - 1249 & c = a + 473b \\ 3,6702 - 2262 & c = a + 573b \\ 4,9315 - 3317 & c = a + 673b \end{array} \right.$$

1) P. Weiss u. A. Forrer, Ann. de Phys. 5. S. 153. 1926.

2) P. Weiss u. H. Kamerlingh-Onnes, a. a. O.

Die Auflösung dieser Gleichungen durch geeignete Kombination ergibt nun in Wirklichkeit wiederberechnete Werte für $R_{\text{reduz.}}$, die die lineare Temperaturabhängigkeit hinreichend gut erfüllen. Daraus sind weiter mit $\Theta = 370$ die entsprechenden Werte für $R_{\text{reduz. } T} / R_{\text{reduz. } \Theta}$ berechnet und in der Fig. 2 gegen T/Θ aufgetragen worden. Zum Vergleich sind in dieser Figur eine Kurve gemäß Gleichung (4) und auch die Werte für R_T/R_Θ von Cu und Pt wieder nach den Messungen von Holborn¹⁾ an seinen reinsten Proben hineingetragen. Θ ist, wieder nach Simon²⁾, für Cu zu 315, für Pt zu 225 gesetzt worden. Die reduzierten Widerstandswerte für Ni stimmen mit den Widerstandswerten für die nichtferromagnetischen Metalle vorzüglich überein.

Zusammenfassung

Es wird für Nickel im Anschluß an Anschauungen, die früher von Johansson veröffentlicht waren, und mit Hilfe einer von Cabrera und Gerlach und Schneiderhan gefundenen Beziehung zwischen Widerstand und spontaner Magnetisierung gezeigt, daß der elektrische Widerstand eines ferromagnetischen Metalls als die Summe eines normalen Temperaturwiderstandes und eines mit der Abmagnetisierung zusammenhängenden Zusatzwiderstandes aufgefaßt werden kann.

Stockholm, Phys. Institut der Technischen Hochschule, November 1930.

1) L. Holborn, a. a. O.

2) F. Simon, a. a. O.

Bemerkung zur Korrektur: Bei dem Suchen nach dem von Gerlach und Schneiderhan angegebenen Bericht von B. Cabrera, Ann. Soc. Esp. 1919 (?) habe ich eine Arbeit von B. Cabrera und J. Torroja, Anales de la Sociedad Espanola de Fisica y Quimica 11. p. 443 und 525. 1913, gefunden, in der die Gültigkeit der Gleichung (1) schon experimentell nachgewiesen worden ist.

(Eingegangen 8. Dezember 1930)

Additive Vorausberechnung von Gasmolwärmen

Von Max Trautz

(31. Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Institut
der Universität Heidelberg)

I. Das Ziel

Für die Bedürfnisse der chemischen und Ingenieurpraxis wie als Rahmenbedingung für die Arbeit des Theoretikers wäre es von hohem Wert, Gasmolwärmen vorausberechnen zu können; etwa an Hand der jeweiligen chemischen Formel und allenfalls noch des Siedepunkts oder einer ähnlichen leicht zugänglichen Größe; am besten natürlich für das ganze praktisch in Betracht kommende Temperaturgebiet von etwa $T = 300$ bis $T = 1800$.

Deduktiv aus den sehr wenigen einigermaßen genau vermessenen C_p - T -Kurven, die im Sinn der Theorie nur einfachste Fälle sein können und (H_2) trotzdem schon — mindestens formal — recht verwickelter Deutung bedürfen, solch allgemeine, praktisch benützbare, d. h. sehr einfache Regeln erhalten zu wollen, gültig selbst nur für die bisher zu C_p -Messungen benützten Stoffe, ist für die nächste Zeit mit Bestimmtheit aussichtslos.

Induktiv das reiche, wenn auch sehr ungleiche und meist sehr ungenaue C_p -Messungsmaterial zur Gewinnung von Regeln der genannten Art auszunützen, scheint dabei merkwürdigerweise noch nie in größerem Umfang versucht worden zu sein. Wir berichten im folgenden, wohin wir damit gelangt sind.

II. Die Methode

Theoretisch hat sich hier nur ein Gesichtspunkt allgemein bewährt: Das translatorische $C_p = 3R/2$, allgemein gleich für alle Gase, scheidet aus; es bleibt nur $C_p - 3R/2$ zur Unter-

suchung und Vorausberechnung übrig; die *innere Molwärme* des Gases.

Bei zweiatomigen Gasen hebt sich nach üblicher Meinung die Stufe eben entwickelter Rotation mit $C_v = 5R/2$ hinreichend von den in der C_v - T -Kurve benachbarten Werten ab. Das trifft aber nicht so allgemein zu: Einmal liegt die Einsattelung der Kurve bei H_2 und bei N_2 möglicherweise unter dem theoretisch für volle Rotation geforderten Wert, und dann setzt z. B. die Kurve für Cl_2 , wahrscheinlich auch die für Br_2 und J_2 überhaupt nicht merklich beim Durchlaufen des Rotationswerts $5R/2$ ab.

Das Hantelmodell oder das dreiachsige Ellipsoid in Einzelheiten auszubauen, hat sich bekanntermaßen nicht bewährt; beim letzteren ist auch rein theoretisch bereits die Trennung zwischen Oszillation und Rotation mit Schwierigkeit behaftet. Ihr kommt auch mehr die Natur eines Hinzugedachten zu, als der Abtrennung des bloß translatorischen Anteils. So rechtfertigt es sich theoretisch, daß wir im folgenden $C_v - 3R/2$ verwenden, nicht $C_v - 5R/2$ bzw. $C_v - 6R/2$.

Wir haben aber, um nicht in einem etwaigen Vorurteil befangen zu sein, die Mühe nicht gescheut, alle Rechnungen auch unter der zweiten Voraussetzung, also mit 5 bzw. $6R/2$ durchzuführen. Bei vielatomigen Molekeln kann das natürlich keinen wesentlichen Unterschied machen; er fällt da bald in die Fehler. Anders bei wenigatomigen.

Hier kommt man mit $3R/2$ auf eine ganze Reihe höchst bequemer und willkommener Bruttobeziehungen, die mit 5 bzw. $6R/2$ sehr viel an Einfachheit und Symmetrie verlieren, ja größtenteils ganz verschwinden. Dementsprechend vermieden wir im Interesse der Gewinnung recht allgemeiner Regeln jede ins einzelne gehende Vorstellung, und suchten mehr phänomenologisch die allgemeinen Züge des Befundes auf.

Man macht dabei, rein empirisch, namentlich vier Wahrnehmungen:

1. Die *spezifischen* Wärmen liegen einander im allgemeinen sehr viel näher als die Molwärmen, so daß man von einer genäherten Proportionalität der inneren Energie zur Masse sprechen könnte. Man wird daher versuchen, die $(C_v - 3R/2)$ - T -Kurven, wir wollen sie C_i - T -Kurven nennen, einander zu nähern, indem man C_i durch eine der 1. naheliegende M -Potenz dividiert.

2. Die *innere Energie* (Rotation wie Oszillation) fehlt bei einatomigem Gas, kann also als eine *multiplikative* Gegenseitigkeitseigenschaft der betreffenden Atome nicht durch Atomäquivalente additiv aufgebaut werden. Wie man bei Stoßzahlfolgen Stoßzahlwirkungen summiert, wobei an jedem Stoß mindestens zwei Partikel beteiligt sind, so addiert man schon seit van't Hoff *Bindeäquivalente*, um die gleichfalls multiplikative Gegenseitigkeitseigenschaft der Wärmetönung additiv aufzubauen. Es ist kein weiter Schritt, auch ihren Temperaturkoeffizienten, eben die Molwärmen, additiv aus Äquivalenten zusammenzusetzen; wobei es aber zunächst zu entscheiden bleibt, ob man sie selbst oder eine lediglich einfache Funktion von ihnen additiv darstellt. Die additive Praxis an sich hat so große Vorteile, daß es wichtiger ist, zu ihr zu gelangen, als daß man die Molwärme als solche beibehielte.

Nehmen wir an, wir hätten eine für die Geltung solcher Addition besonders geeignete C_i -Funktion gefunden. Dann berechnet sich ihr Zahlwert für eine gegebene Bindung am bequemsten aus C_i solcher Verbindungen, die nur die betreffende Bindung und keine anderer Art enthalten. Solche wollen wir gleichbindige oder *homodetische Molekeln* nennen, z. B. CH_4 , H_2O , CO , NH_3 usw. Die ungleichbindigen, *heterodetischen* dagegen (höhere Paraffine, CHCl_3 , Benzol usw.) stellen die Aufgabe, den einheitlichen C_i -Wert aus stöchiometrischen Summen verschiedener Bindewerte (z. B. bei CHCl_3 ein C-H und 3 C-Cl) aufzubauen. Die Gesamtanzahl b der Bindungen in der Molekel (ohne Rücksicht, ob einfach, doppelt usw.) heiße *Bindezahl*. Wir suchen jene Funktion von C_i , die b genähert proportional ist, bei vergleichbaren Temperaturen. Die Abweichung von der Proportionalität wird sich dann mit individuell geeignet gewählten Bindeäquivalenten, *Bindewerten* B , darstellen lassen. Angesichts der meist sehr mäßigen Genauigkeit der gemessenen C_i und ihres an sich — sobald man durch etwa die 1. Potenz von M dividiert hat — in keinem sehr weiten Bereich sich bewegenden Zahlwerts kann dies ersichtlich kaum allzu schwierig sein.

3. Als *vergleichbare Temperatur* wählen wir voraussichtlich versuchsweise am besten die im Sinn von van'der Waals

reduzierte, also T/T_k . Läßt sich doch T_k , soweit es nicht gemessen ist, u. a. aus dem Siedepunkt, der meist bekannten Stoffkonstanten, recht genähert ableiten.

Man kann hier zwei Einwände erwarten: Einmal, daß das Theorem der übereinstimmenden Zustände bekanntlich nicht zutrifft. Es wird auch hier nicht als gültig angenommen. Einer weiteren „Reduktion“ der ϑ auf Skalen, die noch besser vergleichbar sind, noch eher identische C_i - ϑ' -Kurven geben, gehen wir dabei entgegen.

Der zweite Einwand ließe sich etwa so fassen: Was soll T_k in einem für ideale Gase (einzig C_i bei $v = \infty$ soll betrachtet werden) bestimmten Gedankengang, eine Eigenschaftsgröße aus dem typisch unidealen Gebiet? Wäre nicht T_k , sondern etwa eine der beiden van der Waalsschen Konstanten a oder b oder eine der zu ihrer Verfeinerung eingeführten van Laarschen Konstanten verwendet, bestände der Einwand zu Recht. Anders steht es mit der Benützung von T_k , eines festen, zweifellos von Natur ausgezeichneten Temperaturpunkts, charakteristisch für jeden unären Stoff. Während wir für die a, b u. dgl. grundsätzlich keine glatte Beziehung mit idealen Gasgrößen werden erwarten können, steht das mit T_k , genauer gesagt, dem Verhältnis zwischen den T_k verschiedener Stoffe anders. Bloß darf es nicht auf dem Weg über die a, b u. dgl. geschehen; auf welchem denn, bleibt zunächst offen; nur darf er bloß die Gasgleichung $p v = n R T$ voraussetzen, so paradox das klingt. Er darf sich also auf das Molgewicht beziehen (vgl. die folgende Abhandlung).

4. Für die gesuchte Funktion genügt in recht weitem Umfang, wie wir zeigen wollen, die mit der empirisch gefundenen Potenz $M^{1/3}$:

$$\frac{C_v - 3R/2}{M^{1/3} \cdot b} = k/b$$

bei übereinstimmenden Temperaturen $\vartheta = T/T_k$. Diese Größe, an homodetischen Molekeln bestimmt, setzt, nach Maßgabe der chemischen Formel (homo- oder heterodetischer) Verbindungen summiert, ihr k zusammen. Das Verfahren ist also äußerst einfach, und es umspannt alle bis heute gemessenen Gas-molwärmen. Die Bindewerte sind dabei von so ähnlicher Größe bei verschiedenen Bindepaaren, daß man mit bedeutender

Sicher
und b
etwa
handl
und S
Anteil
Sinn d
teile k
peratu
nicht
des b
die,
tracht
beiden
Temp
hat ke
man s
M
mit n
Einze
Zweck
Geset
träglie

S
weisen
sicher
Beträ
System
an, w
die A
dies
Zahlen

setzu
Binde

Sicherheit Gasmolwärmen beliebiger Stoffe bekannter Formel und bekannten Siedepunkts vorläufig für den Bereich θ gleich etwa 0,5—1, voraussagen kann (Erweiterung vgl. nächste Abhandlung). Diese Bindewerte enthalten nun jedenfalls Rotations- und Schwingungsanteile in sich, bei höherer Temperatur auch Anteile von Elektronenanregung. Daß diese wie man sieht, im Sinn der Bandentheorie betrachtet, komplexen und nur Molekelteile kennzeichnenden Bindewerte jeweils der reduzierten Temperatur der ganzen Molekel zuzuordnen sind, hat natürlich nicht die Bedeutung, daß man in ihr die reduzierte Temperatur des betreffenden Bindepaars im freien Zustand sähe; sondern die, daß das Bindepaar in einer anderen Verbindung betrachtet, dann denselben Bindewert hat, wenn die Temperaturen beider Verbindungen „übereinstimmende“ sind. Die reduzierte Temperatur des in einer Verbindung gedachten Bindepaars hat keinen Sinn; aber man kann gekürzt von ihr reden, indem man sie nicht aufs Bindepaar, sondern auf die Verbindung bezieht.

Man kann sehr wohl den Standpunkt vertreten und wohl mit mancher Erfahrung begründen, daß Rücksichtnahme auf Einzelzüge von Elementarprozeßtheorien, die zu anderen Zwecken entwickelt worden sind, der Aufdeckung allgemeinerer Gesetzmäßigkeiten statistischer Mittelwertsgrößen vielfach abträglich sind.

III. Zahlenbeziehungen und -belege

Sie werden die Geltung der behaupteten Additivität erweisen, die heute noch bestehenden Schwankungen und Unsicherheiten zeigen. Zweitens führen sie zur Kenntnis der Beträge für die Bindewerte, ihre Anordnung im periodischen System, ihre Temperaturkoeffizienten. Drittens deuten sie an, was der Gegenstand der nächsten Mitteilung ist, wie man die Additivität auf alle Temperaturen erweitern wird, soweit dies der hier schmalere Erfahrungsboden gestattet.

Da es sich durchweg um bloße Näherungen handelt, sind alle Zahlen nur mit dem (50 cm) Rechenschieber berechnet.

1. Atomzahl und Bindezahl

Die Atomzahl z eines Moleküls bekannter Zusammensetzung und bekannten Molgewichts ist stets bekannt. Die Bindezahl b dagegen kann in vielen Fällen noch nicht ohne

weiteres daraus abgeleitet werden: Zweibindig wäre N_2O , wenn es stabförmig, dreibindig, wenn es ringförmig wäre. Roher, aber dafür allgemeiner anwendbar wird eine faktisch auf Bindezahlen bezügliche Gesetzmäßigkeit, wenn man sie statt dessen auf Atomzahlen bezieht; besonders unvollkommen dann natürlich bei wenigatomigen Stoffen. Man kann dies benützen, um die Leistung unserer Funktion k als solcher für sich besser beurteilen zu können. Dividiert man sie durch z , so wird man für Molekeln prozentual etwa gleicher Zusammensetzung und Bindeart cet. par. (d. h. bei gleichem ϑ) etwa gleiche k/z erwarten müssen, falls unsere Funktion k sich zu unseren Zwecken eignet.

In der Tat kann man damit die Molwärmen aller Paraffine (25—15 Proz. H von CH_4 bis $n-C_{10}H_{22}$) bereits recht gut darstellen, wenn man ϑ nicht allzu weit variiert; es gilt nämlich:

$$(1) \quad \frac{C_v - 3R/2}{M^{2/3} z} = k/z = 0,091_2 \sqrt{\vartheta}.$$

Tabelle 1

Gas	T_k	ϑ	C_v gef.	C_v ber.	Gas	T_k	ϑ	C_v gef.	C_v ber.
CH_4	190,6	1,56,	6,58	6,57	$n-C_5H_{12}$	470,3	,764	27,5	26,4
—	—	1,01,	6,09	5,89	$n-C_6H_{14}$	—	,623	26,0*)	23,9
—	—	,745	5,25	5,46	$i-C_6H_{14}$	460,9	,719	30,4	25,7
—	—	,551	5,47*)	5,10	—	—	,61	28,6*)	23,9
C_2H_6	305,2	,944	10,42	9,82	$n-C_6H_{14}$	507,9	,695	29,4	32,6
—	—	,626	8,47	8,55	—	—	,587	32,6*)	30,2
C_3H_8	370,6	,789	13	14,1	$n-C_7H_{16}$	539,9	,561	39,1*)	36,8
—	—	,741	12,6*)	13,7	$n-C_8H_{18}$	569,3	,524	45,3*)	43,4
$n-C_4H_{10}$	426	,641	17,3*)	18,3	Diisoamyl $C_{10}H_{22}$	604	,289	57,7*)	57,9

*) Die so angestrichelten Zahlen fußen nicht auf gemessenen C_v -Werten, sondern auf denjenigen C_v , die Hr. Dr. Badstübner (vgl. Ann. d. Phys. [5] Bd. 8. S. 267 ff. 1931) aus den Dampfdruckkurven und Kondensat-Molwärmen berechnet hat.

Die übrigen in vorliegender Arbeit benützten C_v -Zahlen sind den bekannten Tabellenwerken (vgl. vor. Mitt.) entnommen und an Hand der Bezugstemperaturen leicht zu identifizieren. Zum weitaus größten Teil sind außerdem in der vor. Mitt. die zugehörigen Stellen in den Tabellen zitiert. Wiederholung all dieser Zitate ist daher hier, vollends, wo es sich im allgemeinen nur um oft rohe Näherungsregeln handelt, im Sinn der Raumersparnis unterlassen.

Die Isopentanzahlen, vor Jahren von Hrn. Vogel in Freiburg i. B. gemessen, sind offenbar mit einem erheblichen syste-

matischen Fehler behaftet. Die übrige Übereinstimmung dagegen ist so gut, daß man nicht anstehen wird, mit der Formel auch etwas zu extrapolieren. Man kann sie durch die kleine Tabelle für verschiedenen H-Prozentgehalt der Verbindungen leicht auf die zyklischen Kohlenwasserstoffe erweitern. Denn

Tabelle 2

% H	Konstante
25	0,091 ₅
20	0,096
15	0,100 ₈
10	0,105 ₅
5	0,110 ₅

die Bindungsart macht, wie schon länger bekannt, bei den spezifischen Wärmen nicht viel aus, und die Temperaturreduktion mit $\sqrt{\vartheta}$ bedeutet wegen des engen Bereichs von ϑ nur eine kleine Korrektur. Andererseits ist die $\sqrt{\vartheta}$ für die ganze Darstellung der Oszillationswärmen (nur nicht zu nah an der Rotationsschleife) bis zu den höchsten Temperaturen ausgezeichnet brauchbar; eine nicht uninteressante Beziehung, die als Ungefährgesetz gastheoretisch leicht begreiflich ist, wenn sie auch meines Wissens nie erwartet worden ist; sie gilt für die höheren Temperaturen über ein sehr großes ϑ -Gebiet recht genau.

An Hand von Gl. (1) und der kleinen Tab. 2 finden wir jetzt für die

Tabelle 3

Cyclische Kohlenwasserstoffe

Gas	T_k	ϑ	C_p gef.	C_p ber.	Gas	T_k	ϑ	C_p gef.	C_p ber.
C_6H_{12}	553,1	,675	32,8	31,8	$C_6H_4 \cdot CH_3$	593,8	,527	27,1	26,8
—	—	,530	26,8	28,5	m- $C_6H_4(CH_3)_2$	622,1	,487	29,4 ^{*)}	32,8
—	—	,530	30,8 ^{*)}	28,5	Naphtalin	741,3	,476	40,2 ^{*)}	37,5
C_8H_8	561,6	,522	19,8	20,2	Anthracen	≈ 920	,536	78,9 ^{*)}	64,0
—	—	,522	20,	20,2					
—	—	,522	21,5 ^{*)}	20,2					

Auch bei dem einzigen, wenig zuverlässig gemessenen, Olefin, dem Äthylen, bewährt sich die Rechnung noch für die Zahl bei Zimmertemperatur ganz gut:

Tabelle 4

Gas	T_k	ϑ	C_v gef.	C_v ber.
C_2H_4	282,6	1,03	8,24	8,62
—	—	0,839	7,2	8,53
—	—	0,644	6,67	7,44
—	—	0,542	6,3	7,1

Ob die Abweichungen an T_k , an der Abweichung vom Gasgesetz, an der Doppelbindung (was nicht wahrscheinlich) oder an sonst einem Fehler liegen, bleibt einstweilen offen. Bei Tieftemperaturzahlen ist schon die C_v -Unsicherheit im allgemeinen recht groß.

2. Bindezahl und Bindewert

Da sich k/b hinreichend additiv zusammensetzen läßt, so kann man jetzt aus den C_v an homodetischen Verbindungen die Bindewerte k/b für die betreffende Bindung ausrechnen. Daß sie mit ϑ steigen werden, versteht sich.

Tabelle 5

Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b
CH_4	,551	,0980	CCl_4	,617	,110	Cl_2	,583	,165	HCl	7,00	,358
(: C-H)	,745	,0895	(: C-Cl)	,545	,133		,648	,174	NO	1,072	,246
	,829	,0852		,545	,145 [*])		,655	,174		1,211	,237
	1,013	,122		,491	,144		,698	,170		1,266	,227
	1,045	,118	$SiCl_4$,865	,148		,763	,183		1,600	,222
	1,275	,125	(: Si-Cl)	,592	,148 [*])		,895	,189		2,030	,204
	1,433	,141	$SnCl_4$,818	,119		,939	,201	N_2	,731	,238
	1,459	,134	(: Sn-Cl)	,556	,146 [*])		1,083	,207		2,326	,219
	1,512	,139	PCl_3	,808	,170		1,085	,194		2,352	,217
	1,537	,141	(: P-Cl)	,586	,184 [*])		1,374	,218		2,417	,212
	1,562	,142	J_2	,683	,089		1,854	,229		2,961	,200
	1,958	,222		,554	,092		3,533	,241		3,049	,213
	2,01	,179	HJ	,787	,082		5,45	,247		3,785	,217
	2,088	,201	Br_2	,828	,137	HCl	,842	,184	H_2	1,507	,0188
	2,482	,312		,744	,133		,888	,192		3,013	,276
	2,525	,246		,553	,084 [*])		1,016	,193		3,317	,401
	3,007	,374	HBr	,904	,09		1,026	,187		5,92	,884
	3,531	,444					1,150	,184		8,23	1,165
	4,056	,511					1,150	,193		11,24	1,122
	4,581	,575					1,205	,169		17,26	1,288
							1,766	,209		23,3	1,310
							2,382	,227		44,4	1,766
							4,54	,288		68,6	2,204

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b	Gas	ϑ	k/b
CO.	,693	,247	CO ₂	,631	,125	H ₂ O	,422	,215	NH ₃	,565	,126
	2,03	,218		,893	,146		,499	,276		,570	,128
	2,17	,221	(: C=O)	,898	,148	(- O-H)	,577	,228	(: N-H)	,570	,159
	2,213	,218		,945	,158		,577	,262		,592	,178 ^{*)}
	2,225	,196		,947	,151		,577	,281 ^{*)}		,600	,150
	2,776	,224		,953	,151		,731	,263		,624	,161
	2,865	,198		,960	,154		,886	,264		,649	,164
	2,874	,219		,963	,153		,886	,265		,673	,166
	3,574	,228		,964	,155		1,040	,268		,673	,178
	4,264	,235		,968	,153		1,195	,274		,710	,180
	5,752	,247		1,062	,157		1,195	,293		,718	,179
	10,96	,300		1,179	,170		1,349	,269		,723	,172
	16,91	,360		1,227	,184		1,504	,297		,772	,178
				1,408	,183		1,658	,314		,821	,184
O ₂	,597	,233		1,417	,210		1,855	,334		,871	,192
	1,277	,189		1,419	,210		1,967	,358		,920	,199
	1,900	,200		1,556	,186		2,276	,416		,920	,199
	1,961	,199		1,604	,230		2,276	,394		,969	,184
	2,471	,210		1,885	,243		2,586	,487		,969	,206
	2,483	,196		2,213	,220		2,895	,571		1,019	,213
	3,104	,222		2,542	,271		3,513	,725		1,413	,260
	3,261	,219		2,871	,247		3,513	,582		1,414	,261
	3,876	,238		3,529	,270		3,822	,761		1,714	,295
				4,186	,288					1,907	,319
SO ₂	,588	,152 ^{*)}		4,844	,305	H ₂ S	,579	,214		1,961	,300
	,635	,132		7,474	,325		,600	,203		1,963	,334
(: S=O)	,669	,142				(- S-H)	,611	,195		3,633	,420
	,679	,142					,613	,197			
	,681	,147	CS ₂	,749	,200		,745	,169	N ₂ O	,656	,0907
	,867	,160		,679	,158		,785	,125		,785	,1025
	,888	,153	(: C-S)	,561	,195		,999	,142	(: N-O)	,898	,1054
	1,332	,194		,553	,209		1,010	,145		,929	,1118
				,534	,195 ^{*)}					,934	,1112
				,528	,123					,947	,1129
										1,242	,1332
										1,258	,1354

Wir wollen diese Zahlen der Reihe nach verwenden, um jetzt auch aus heterodetischen Molekeln Bindewerte zu gewinnen. Dazu gehen wir vom Methan aus und interpolieren die k/b für es und für die Temperaturen, die bei den anderen Paraffinen vertreten sind (vgl. Tab. 1). Das k/b ist der Bindewert der C-H-Bindung. Subtrahiert man es so oft, als es in einem Paraffinmolekül vorkommt, und dividiert den Rest durch die Zahl der C-C-Bindungen, so muß der Bindewert der C-C-Bindung sich ergeben; so kommt man zur folgenden Tabelle:

Tabelle 6

ϑ	Bindewert (:C-C:)	Gas
,479	,049	nC ₁₀ H ₂₂
,505	,060	nC ₉ H ₂₀
,524	,067	nC ₈ H ₁₈
,561	,078	nC ₇ H ₁₆
,623	,114	nC ₅ H ₁₂
,626	,094	C ₃ H ₆
,641	,071	nC ₄ H ₁₀
,695	,038	nC ₆ H ₁₄
,741	,042	C ₃ H ₈
,764	,115	nC ₅ H ₁₂
,780	,101	C ₃ H ₆
,789	,047	C ₃ H ₈
,944	,209	C ₂ H ₆

Bedenkt man, daß viele dieser Zahlen kleine Differenzen zwischen erheblich fehlerbehafteten Einzelwerten sind, so wird man die Übereinstimmung recht befriedigend finden; und man kann für das kleine benützte ϑ -Gebiet wohl innerhalb der heutigen Fehlergrenze die beiden Näherungsausdrücke erhalten

$$\text{C-C} = 0,010 + 0,102 \cdot \vartheta$$

und

$$\text{C-H} = 0,0428 + 0,0584 \cdot \vartheta.$$

Dabei begingen wir eine kleine Inkonzsequenz: Das anfängliche Fallen von C_v mit steigendem ϑ bei CH₄ ist vielleicht reell (vgl. später), findet sich aber bei demselben ϑ nicht mehr bei den anderen Paraffinen. Deshalb sind die Methanwerte so interpoliert, als ob sie auch zwischen $\vartheta = 0,45$ und $\vartheta = 1,0$ etwa so stiegen, wie sie das wirklich von da aufwärts tun. Das Fallen ist als eine Störung behandelt, die es ja auch ist. Übrigens hat man in der Literatur bisher stets sogar im allgemeinen das Fallen überhaupt nicht ernst genommen, vielleicht mit Recht; an CH₄ für sich ist das unentschieden, doch werden Analoga bei anderen Gasen hier zugunsten der Wirklichkeit des Fallens von $C_{v=\infty}$ sprechen.

Eine weitere Probe liefert Cyclohexan, worin wir C-C (vgl. oben) verwenden:

Tabelle 7

ϑ	C-H gef.	C-H aus CH ₄ ber.
,530	,0763	,073
,675	,0943	,081

Die Werte streuen nicht mehr als die der Paraffine.

Äthylen liefert den Bindewert von C=C, von dem wir nach allen Erfahrungen an den Molwärmen nicht erwarten werden, daß er sich von C-C wesentlich unterscheidet. Das ist auch so: Daher man für die Benzolbindung auch nicht viel anderes erwarten darf und auch findet:

Tabelle 8

	ϑ	k/b für C=C
C ₂ H ₄	,542	,059
	,644	,077
	,839	,088
	1,030	,156
	1,364	,267

Tabelle 9

	ϑ	k/b		ϑ	k/b
C ₆ H ₆	,522	,0858	C ₆ H ₅ CH ₃	,527	0,0882
	,619	,096	mC ₆ H ₄ (CH ₃) ₂	,487	0,0575
	,629	,061	Naphthalin	,476	,0898
	,664	,109	Anthracen	,536	,104
	,678	,109			
	,784	,134			
1,109	,203				

Die Bindewerte der Ringbindung scheinen mit ϑ etwas steiler zu wachsen, doch kommt das darauf an, ob man die keineswegs sicheren Werte bei den höheren Temperaturen bei Benzol als so tragfähig beurteilt.

Gehen wir jetzt zu den O-Bindewerten und lassen wir einstweilen noch die assoziationsverdächtigen Alkohole beiseite. Bedienen wir uns der gewonnenen Bindewerte von C-C und

C-H bei Estern, so erhalten wir für die Estergruppe $\text{C}-\overset{\text{O}}{\parallel}-\text{C}$ folgende Bindewerte:

Tabelle 10

Ester	ϑ	k/b	Ester	ϑ	k/b
H-COOCH ₃	,604	,862*	CH ₃ COOCnC ₃ H ₇	,534	,495*
H-COOC ₂ H ₅	,601	,754*	C ₂ H ₅ -COOC ₂ H ₅	,537	,475*
CH ₃ -COOCH ₃	,569	,701*	nC ₃ H ₇ -COOCH ₃	,529	,445*
H-COOCnC ₃ H ₇	,573	,588*	iC ₃ H ₇ -COOCH ₃	,542	,477*
CH ₃ -COOC ₂ H ₅	,841	,603	C ₂ H ₅ -COOCH ₃	,541	,648*
	,736	,543			
	,662	,439			
	,563	,623			
	,560	,627*			
C ₂ H ₅ COOCH ₃	,552	,629*			

Besonders sicher sind die zwei untersten Essigesterwerte. Man kann sagen, daß der Bindewert im ganzen in der Tabelle

vertretenen Temperaturgebiet konstant ist mit etwa 0,67. Wenn hier die längsten Ketten etwas kleinere Bindewerte haben, so darf man nicht vergessen, daß bei den Paraffinen davon nicht viel zu sehen war, und daß ein kleiner Fehler an C-C oder C-H gerade bei vielatomigen Molekeln natürlich viel ausmachen muß. Endlich, daß ein gut Teil der Ester- C_v aus Dampfdruckkurven berechnet und also mit dem Fehler dieser indirekten Ermittlung behaftet ist. Was hierüber jetzt gesagt ist, gilt weitgehend für alle die Zahlen vielatomiger Molekeln, zu denen wir jetzt kommen. Für Ketone findet man:

Tabelle 11

Keton	ϑ	k/b für $C=O$
$CH_3 \cdot CO \cdot CH_3$,827 ,739 ,670 ,576	,545 ,444 ,374 ,325*)
$CH_3 \cdot CO \cdot C_6H_5$,548	,472*)
$C_6H_5 \cdot CO \cdot C_6H_5$,347	,573*)
Aldehyd	—	—
$C_6H_5 \cdot CHO$,565	0,2—0,3*)

Praktisch ist also der Bindewert für $C=O$ konstant 0,45, so daß für $C-O-C$ (aus den Esterzahlen berechnet) 0,22 hinterbleibt, falls man in den Estern den einen Sauerstoff carbonylartig gebunden ansehen dürfte wie in den Ketonen, und falls die Fehler nicht bereits allzu groß wurden bei der dauernden Differenzenbildung. Darauf, daß diese Bedenken ernst zu nehmen sind, deutet der ganz andere Bindewert von Äther- O . Man findet:

Tabelle 12

	ϑ	k/b für $C-O-C$
$C_2H_5 \cdot O \cdot C_2H_5$	1,335 1,228 ,982 ,899 ,817 ,799 ,731 ,660	,762 ,797 ,812 ,676 ,742 ,827 ,750 ,987

Es ist also merklich konstant der Bindewert des Äther-O $C-O-C = 0,8$ im benützten ϑ -Gebiet. Die abnorme Größe der O-Bindewerte gegenüber den vorher betrachteten wird man einerseits mit Schwäche der O-Brücken, andererseits mit der Assoziationsneigung (nicht mit stattgehabter Assoziation, die durch Reduktion auf $v = \infty$ beseitigt sein soll) der Äther verknüpfen. Und man wird dies a fortiori für die Alkohole in gesteigertem Maß erwarten:

Tabelle 13

Alkohol	ϑ	k/b für C-O-H	Alkohol	ϑ	k/b für C-O-H
CH ₃ OH .	1,195	1,297	C ₂ H ₅ OH	,632	,562
	,848	,687		,587	,587*)
	,682	,495	nC ₄ H ₉ OH	,555	,738*)
	,571	,330*)	nC ₆ H ₁₃ OH	,541	,927*)
C ₂ H ₅ OH .	1,207	,508	Amylalkohol . .	,496	,700*)
	,849	,774	C ₆ H ₅ ·CH ₂ ·OH .	,541	,802*)
	,703	,553	m-C ₆ H ₄ ·CH ₂ ·OH .	,542	,956*)
	,703	,646			

Daß sogar das *m*-Kresol sich noch den Alkoholen anschließt, ist alles mögliche. Die höchste CH₃OH-Zahl dagegen ist wohl ganz sicher falsch. Wir nehmen jetzt $C-O-H = ,62$, und sehen von der angedeuteten Steigung der k/b mit ϑ wegen der Fehlergröße ab.

Läßt man die höheren Alkohole, wo die Fehler der Subtrahenden sich multiplizieren, beiseite, so kommt man auf $C-O-H = ,57$. Subtrahiert man davon die Hälfte von Äther- $C-O-C$, so hinterbleibt für $-O-H$ der Bindewert ,17. Damit käme man für H₂O auf ,3, für ϑ etwa gleich 1, was auch mit den Tatsachen stimmt; die Überlegung zeigt nicht, daß es so sein muß, sondern nur, daß es, wenn es so ist, sich mit allen Tatsachen verträgt. Zu einem „muß“ reichen die Genauigkeiten der Differenzen nicht hin (Tab. 14).

Doch muß man bei den Zahlen von Chinolin und den beiden letzten bedenken, daß „eine Zahl noch keine Zahl“ ist. Ähnliches gilt bei Brombenzol, das ebenso wie Bromäthyl und Jodäthyl zu sehr kleinen Bindewerten C-Br (meist schwach negativ) und C-J führen, so daß sie in den Fehlern liegen.

Tabelle 14

Den OH-Verbindungen stehen die Amine nahe: Das gibt die Bindewerte:

Amin	ϑ	k/b		ϑ	Gruppe	Bindewert
$C_6H_5 \cdot NH_2$,534	,645*)	für $C \cdot NH_2$,53	$C \cdot NH_2$,6 bis ,8
$C_6H_5 \cdot NH \cdot CH_3$. .	,539	,550*)	" $C \cdot NH \cdot C$		H	
$C_6H_5 \cdot N(CH_3)_2$. .	,550	,625*)	" $C \cdot N : C_2$		$C \cdot N \cdot C$,5 " ,6
$C_6H_5 \cdot N(C_2H_5)_2$. .	,522	,540*)	" $C \cdot N : C_2$,54		
$oC_6H_4 \cdot CH_3 \cdot NH_2$. .	,521	,849*)	" $C \cdot NH_2$		C	
$pC_6H_4 \cdot CH_3 \cdot NH_2$. .	,521	,849*)	" $C \cdot NH_2$,55	$C \cdot N \cdot C$	etwa ,6
Chinolin	,363	,277*)	" $C \cdot N = C$ (Ring)	,37	$C \cdot N = C$ roh	etwa ,3

An weiteren N-Verbindungen liegen vor:

$C_6H_5 \cdot CN$ $\vartheta = ,539$ $k/b = ,543^*)$ für $C \cdot C \equiv N$, was zu höchstens ,48 für $\cdot C \equiv N$ führt,

$C_6H_5 \cdot NO_2$ $\vartheta = ,538$ $k/b = ,492^*)$ für $C \cdot NO_2$, was mit $O_2/2 = 0,11$, sowie $N : N = 0,22$ zu $C \cdot N = 0,16$ führt, befriedigend mit obigem 0,2 im Einklang.

Besser und teilweise gut steht es mit den Chloriden:

Tabelle 15

C_2H_5Cl $\vartheta = ,796$	k/b f. $C \cdot Cl$,261	$CHCl_3$ $\vartheta = 1,154$	k/b f. $C \cdot Cl$,145
,725	,161	,837	,158
,599	,087*)	,712	,149
C_6H_5Cl ,464	,247*)	,645	,141
		,547	,141*)

Man kann in diesem Bereich $C \cdot Cl = 0,10 + 0,125 \cdot \vartheta$ benützen. Die Störungen werden kaum reell sein. Die Übereinstimmung mit den aus CCl_4 erhaltenen Zahlen ist recht gut.

Als letztes Beispiel nehmen wir Eisencarbonyl, worin wir 5 „Bindungen“ $Fe \cdot C$ haben, für deren jede man findet:

$$Fe(CO)_5 \quad \vartheta = ,529 \quad k/b = ,125 \text{ für } FeC$$

,577 ,172

Kombiniert man schließlich die Zahlen für SO_2 mit den wenig tragfähigen Werten von

$$S_2Cl_2 \quad \vartheta = ,451 \quad k = ,433^*) = S \cdot S + 2(S \cdot Cl)$$

und SO_2Cl_2 ,603 ,417

,567 ,287*)

so kommt $S \cdot Cl$ mit etwa ,08 bis ,13 und $S \cdot S$ mit etwa ,17.

Damit kommt man zu einer in manchem, was bereits genannt ist, natürlich vorläufigen Tafel der Bindewerte.

Es bedeutet darin ein Punkt am Atomzeichen eine Bindung an ein Fremdatom, der Strich eine an das betr. Atom, gegen das man gerade den Bindewert angeben will. Aus bloß zweiatomigen Molekeln erhaltene Zahlen sind geklammert, da hier die Bindung beider Atome anders sein muß, als wenn noch weitere Atome von ihnen gebunden wären.

Tabelle 16

Bindewerte für $\frac{1}{2}$ etwa = $\frac{1}{2}$

C	N	O	S
-H 0,072	-H 0,12 (NH ₃)	-H 0,22-0,25 (H ₂ O; Alk.)	-H 0,14-0,21 (H ₂ S)
-N: 0,2 bis 0,4 (Amine, Nitrok.)	—	—	—
$\frac{1}{2}$ -N≡ 0,3 (Ring, Chinolin)	—	—	—
≡N 0,5 (Cyanide)	—	—	—
$\frac{1}{2}$ -O- 0,4 (Äther)	-O· 0 bis -0,2 (Nitrok.)	—	—
-O· 0,4 (Alkohole)	—	—	—
=O 0,4 ₃ (Ketone)	=O 0,22 (NO)	—	—
$\frac{1}{2}$ $\begin{array}{c} \diagup \text{O} \diagdown \\ \diagdown \text{O} \diagup \end{array}$ 0,22 (Ester)	—	—	—
=O 0,11-0,2 (CO ₂ u. CO)	—	—	—
=S 0,18-0,12 (CS ₂)	—	=S 0,12-0,14 (SO ₂)	—
-Cl 0,16	—	—	-Cl 0,08-0,13 (SO ₂ , S ₂ Cl ₂ u. SO ₂ Cl ₂)
-Br 0 bis -0,3 ?	—	—	—
-J 0 bis 0,1 ?	—	—	—
-C: 0,071 (Paraffine)	—	—	aus denselben:
-C: 0,06 (Äthylen)	=N (0,21) (N ₂)	=O (0,22) (O ₂)	=S 0,17
-C=0,073 (Benzolbindung)	=N -0,3 (N ₂ O)	—	—

Si	P	Sn	Cl	Br	J
-Cl 0,15	-Cl 0,17-0,19	-Cl 0,12-0,15	-H 0,19 -Cl (0,16)	-H ,1 ? -Br (,1 ?)	-H ,1 ? -J (,1 ?)

Die Bindewerte sind untereinander nur wenig verschieden; ja, der Unterschied fällt nicht selten fast oder ganz in die Fehler. Das ist ein maßgebender, die Güte der Additivität

rechnerisch sichernder Vorzug der für k gewählten Funktion, mit anderen Worten der M -Potenz und von $3R/2$.

Ordnet man die Bindewerte im periodischen System an, so sieht man, daß ihre Unterschiede doch gesetzmäßig verteilt sind. Die Bindewerte sind mit 100 multipliziert:

Tabelle 17

C				N				O			
H				H				H			
7				12				22			
C	N	O	—	C	N	O	—	C	N	O	—
7	22	22	40	22	21	20	—	22	40	20	22
S Cl				—				S			
18 16				—				12			
								S		Cl	
								H		H	
								14—21		19	
								C — O —		C — — —	
								12—18		16	
								S Cl		S Cl	
								17? 10		10 16	

Die Äquivalente von H gegen C, N, O stehen in den Fehlern im Verhältnis 1:2:3.

Die Selbstbindung von C ist eine Ausnahmezahl gegenüber den anderen, die alle etwa 0,2 sind.

Ein Fallen der Bindewerte nach rechts und unten ist merklich angedeutet.

Zum Schluß wollen wir noch bemerken, daß man mit $C_e - 5R/2$ bzw. mit $C_e - 6R/2$ (für 2- bzw. 3- und mehratomige Molekeln) zwar eine sehr ähnliche Additivität bekommt, daß aber die Bindewerte weiter auseinanderdrücken, was die Fehler vergrößern, das Stimmen verschlechtern muß. Daß weiter auch die Temperaturabhängigkeit individueller ausfällt.

Besonders verhängnisvoll ist es dann, daß die Ausgangsgröße $C_e - 5R/2$ bzw. $C_e - 6R/2$ gerade für jene Verbindungen sehr klein und daher extrem unsicher ausfällt, die doch den besten Ausgangspunkt bieten sollten, für die wenigatomigen gleichbindigen, etwa CH_4 , CCl_4 usw. Ja, das interessante Sattelstück bei den tiefen Temperaturen wird so gewissermaßen einfach weggeschnitten.

Kurz: Wer Bruttoregeln für statistische Größen nötig hat, der darf nur die allerallgemeinsten Züge der Theorie in sein Werkzeug aufnehmen.

IV. Verallgemeinerungen

Was im vorstehenden an allgemeinem aus dem Zahlenmaterial über C_v herausgezogen wurde, ist zwar mit bereits erheblicher Ungenauigkeit behaftet, aber dennoch sehr reicher Anwendung und weiterer Verallgemeinerungen fähig.

Anwendungen macht man damit auf alle diejenigen Verbindungen der Chemie, von denen man Molgewicht, Näherungswert der kritischen Temperatur und in großen Zügen die Konstitution kennt. Sofern nämlich darin nur solche Bindungen vorkommen, für die wir im obigen die Bindewerte bestimmt haben. Man addiert die betreffenden Bindewerte, multipliziert das Ergebnis mit $M^{1/2}$ und addiert $3R/2$. Damit hat man C_v der betreffenden Verbindung für die Temperatur etwa 0,5 in reduzierter Zählung in der Hand, woraus man durch Multiplikation mit dem betreffenden T_k die Bezugstemperatur erhält. T_k ist aus dem Siedepunkt oder Schmelzpunkt mit bekannten Regeln abzuschätzen, sofern es nicht experimentell bestimmt ist. Man darf wohl sagen, daß die gewonnene Additionsvorschrift die weitaus größte Zahl der heute interessierenden Verbindungen zum mindesten überschlagsmäßig auf ihr C_v beurteilen lasse. Und da dieses mit dem des Kondensats in einer ebenfalls recht brauchbaren Regel¹⁾ verbunden ist, so sind damit auf einen Schlag auch Kondensatmolwärmen einer ebenso enormen Anzahl von Stoffen überschlagsmäßig zugänglich. Die Ähnlichkeit der Bindewertbeträge untereinander verbürgt hierbei, daß irgend grösste Fehler nicht eintreten können. Zahlen wie Berechnungsvorschrift lassen sich natürlich gewiß noch verbessern.

Wer Verbindungen mit solchen Bindungen abschätzen muß, deren Bindewerte noch ganz unbekannt sind, kann aber sogar heute schon den Bindewert der „unbekannten Bindung“ mit etwa 0,15 bis 0,2 ansetzen, und wird vermutlich selbst damit nicht allzusehr danebengehen.

Dem Theoretiker bieten die erhaltenen Beziehungen Rahmenbedingungen, und außerdem Aufgaben der Deutung und Verschärfung.

1) Vgl. M. Trautz u. W. Badstübner, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 267 ff. 1931.

Die Verallgemeinerung betrifft zunächst die Erweiterung auf alle Temperaturen und begibt sich so mit Notwendigkeit auf ein Gebiet, wo stärkere Extrapolationen unvermeidlich sind; die nächste Mitteilung befaßt sich damit.

Eine andere Seite der Verallgemeinerung soll aber auch noch gestreift werden:

Die Molwärmen, als Temperaturkoeffizienten der Wärmetönungen betrachtet, verhalten sich, in einer geeigneten Funktion benützt, *bindeadditiv*, wie wir die Additivität von Bindewerten kennzeichnen wollen. Dem entspricht, daß die Wärmetönungen selbst, und also wohl auch die sie zusammensetzenden Aktivierungswärmen *bindeadditiv* sind. Mehr oder minder hat man ja gefühlsmäßig wohl immer so gerechnet, wenn man Wärmetönungen verglich.

Zusammenfassung der Ergebnisse

1. Die Funktion $\frac{C_p - 3R/2}{M^{1/2}} = k$ läßt sich aus ebenso vielen *Summanden* zusammensetzen als Bindepaare in der Molekel vorliegen.
2. Ein solcher Summand, für eine gegebene Bindung bei gegebener Temperatur von bestimmtem Zahlwert — *Bindewert* — liegt stets sehr nahe in derselben Größe, bewegt sich etwa zwischen 0,1 und 0,5.
3. Man bestimmt den Bindewert eines gegebenen Bindepaars, aus dem k einer Verbindung, die überhaupt nur (b) solche Bindungen enthält, gleichbindig, *homodetisch* ist, indem man k durch b dividiert, und den erhaltenen Zahlwert auf die reduzierte Temperatur der betreffenden Verbindung bezieht.
4. Man kann C_p für eine Verbindung bekannten Molegewichts M und bekannter (z. B. aus dem Siedepunkt geschätzter) kritischer Temperatur für die reduzierte Temperatur etwa $\vartheta = 0,5$ vorausberechnen, indem man der chemischen Formel entsprechend die Bindewerte summiert, die Summe mit $M^{1/2}$ multipliziert, und $3R/2$ zu dem Produkt addiert.
5. Die Bindewerte sind an Hand des ganzen Zahlenmaterials für C_p bestimmt worden für alle daraus ermittelbaren Bindungen, und soweit die Temperaturen variiert worden sind, auch für alle reduzierten Meßtemperaturen (von C_p -Messungen).

6. Die Bindewerte scheinen mit steigender Temperatur bei gewissen leichten Molekeln auf eine kurze Strecke in der Gegend vollendeter Rotationsentwicklung zu fallen, während sie ausnahmslos oberhalb davon langsam, und danach verlangsamt mit T ansteigen.

7. Für die Kohlenwasserstoffe werden Ausdrücke gewonnen, die sogar für verschiedene Temperaturen C_p in weitem Maß vorausberechnen lassen, wegen der Einfachheit und Monotonie der Temperaturfunktion mit beträchtlicher Sicherheit. So z. B. für die Paraffine, aber auch für Benzolkohlenwasserstoffe.

8. Damit ist ein offenbar sehr entwicklungsfähiges Verfahren gewonnen, das künftige Messungen an Molekeln mit noch nicht untersuchten Bindungen sogleich sehr fruchtbar zu machen erlaubt, mit wenigen Messungen also viele C_p -Zahlwerte vorausbestimmen läßt.

9. Es wird darauf hingewiesen, welchen Sinn das Addieren von Bindewerten hat und wie man damit an sich multiplikative Größen additiv behandeln kann, auch konstitutiv beeinflusste Eigenschaftsgrößen korrekter damit vorauszusagen vermag.

Heidelberg, Physikal.-Chemisches Institut der Universität,
22. Oktober 1930.

(Eingegangen 5. Dezember 1930)

Über die Kohärenzlänge des von Kanalstrahlen emittierten Leuchtens

(Bemerkung zu der Erwiderung von E. Rupp)

Von Harald Straub

Zu der Erwiderung von Hrn. Rupp¹⁾ erlaube ich mir, folgendes zu bemerken:

Hr. Rupp behauptet zweierlei: a) daß er mit dem bewegten Leuchten der Linie Hg 5461 des Hg-Kanalstrahles Interferenzen gleicher Neigung bei 20 cm Gangunterschied beobachten konnte, und b) daß er den Einsteinschen Spiegel-drehversuch²⁾ mit positivem Ergebnis wiederholt hat.

Da er sich zur Bekräftigung von a) auf das Zeugnis der Herren Czerny, Pringsheim und Ramsauer beruft, mag auch mir gestattet sein, meine Beobachtungen³⁾ an seiner Apparatur wiederzugeben und mit meiner Anordnung zu vergleichen, soweit diese zur Aufklärung dienen dürften.

1. Im Interferometer waren die Spiegel so montiert, daß der Gangunterschied nicht kontinuierlich geändert werden konnte. Der „Drehspiegel“ hatte keine mikrometrische Drehvorrichtung, so daß seine Drehung weder fein, noch meßbar ausgeführt werden konnte. Die Verteilerplatte war nicht versilbert. Die Stabilität des Interferometers reichte nicht aus, um nach Umstellung des Drehspiegels vom bewegten auf ruhendes Leuchten ohne neue Justierung der Spiegel eine Beobachtung auszuführen.

1) E. Rupp, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 381. 1930; vgl. H. Straub, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 644. 1930.

2) A. Einstein, Berl. Ber. 25. S. 334. 1926.

3) Ich danke Hrn. Rupp für die Aufforderung, mir seine Versuche anzusehen.

Kohärenz

M
eine
bewie

2
Hr. Rupp
Homomorphie
strahl
Beschreibung
vakuum
mündung
einander
erzeugen
allein
Kanalstrahl

für die
einfache

etwa
der
80 m
Druck
nicht

fahrrad

S. 4

der
J. Ko
S. 84
5. Au
S. 414
Ann.
1925;
Phys.
1928;

d. Ph

kanal

Mein Interferometer zeigte große Stabilität, wie z. B. durch eine neue, genaue Messung des Dublettabstandes an H_α bewiesen wurde (vgl. weiter unten S. 291, Anm. 1).

2. Im Gegensatz zu seinen früheren Versuchen¹⁾ hat Hr. Rupp die neuen Versuche zur Erreichung größerer Homogenität mit in zwei Stufen beschleunigten Hg-Kanalstrahlen ausgeführt. Bei einer einwandfreien zweimaligen Beschleunigung müßte die zweite Beschleunigung im Hochvakuum, ohne Entladung erfolgen. Hr. Rupp hat jedoch nach mündlicher Mitteilung seine Kanalstrahlen durch zwei hintereinandergeschaltete Gasentladungen von etwa 3 bzw. 16 kV erzeugt. Übrigens kann man durch doppelte Beschleunigung allein, ohne Ablenkung durch ein Magnetfeld, keine homogenen Kanalstrahlen herstellen.²⁾

Als Hr. Rupp mir seine Apparatur zeigte, war die Röhre für doppelte Beschleunigung durch ein gewöhnliches Rohr für einfache Beschleunigung ersetzt.

3. Der Beobachtungsraum der Röhre war durch eine etwa 1,5 m lange Leitung von etwa 7 cm² Querschnitt mit der StaHPumpe verbunden. Der Kanal der Kathode war 80 mm lang und 5 mm weit, ein Spaltaufsatz³⁾ fehlte. Der Druck im Beobachtungsraum konnte mangels eines Manometers nicht gemessen werden.

Nach allen bisher an Kanalstrahlröhren gemachten Erfahrungen⁴⁾ dürfte es unmöglich sein, mit der Kathode und

1) E. Rupp, Berl. Ber. 25. S. 343. 1926; vgl. Ann. d. Phys. 79. S. 4—5. 1926.

2) Zur Orientierung über diese Fragen erlaube ich mir, einen Teil der Literatur anzuführen: W. Wien, Ann. d. Phys. 8. S. 260. 1902; J. Koenigsberger u. J. Kutschewski, Phys. Ztschr. 11. S. 666. 1910, S. 848. 1910; v. Dechend u. Hammer, Sitzungsber. Heidelb. Akad. 5. Aug. 1910; Gehrcke u. Reichenheim, Ber. d. D. Phys. Ges. 12. S. 414. 1910; J. J. Thomson, Phil. Mag. 20. S. 752. 1910; E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 71. S. 377. 1923; F. Hoffmann, Ann. d. Phys. 77. S. 302. 1925; W. Wien, Ann. d. Phys. 77. S. 313. 1925; W. Riezler, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 429. 1929; Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. 86. S. 1025. 1928; [5] 5. S. 657. 1930; H. Mark u. K. Wolf, Naturw. 18. S. 753. 1930.

3) Vgl. W. Wien, Ann. d. Phys. 60. S. 597. 1919 u. J. Port, Ann. d. Phys. 87. S. 581. 1928.

4) Ich habe neuerdings untersucht, wie weit man den Kathodenkanal ohne Verwendung eines Spaltaufsatzes machen darf, ohne daß

Pumpleitung, wie sie von Hrn. Rupp angewandt wurden, einen abklingenden Kanalstrahl herzustellen. Zu einer einwandfreien Ausführung der Einsteinschen Versuche sollte aber das störende Ruheleuchten möglichst vermieden werden, zumal wenn wegen ungeeigneter Drehvorrichtung eine einwandfreie Umstellung des Drehspiegels von „ruhemdem“ auf „bewegtes“ Leuchten nicht möglich ist. Außerdem konnte ich mit einem Taschenspektroskop feststellen, daß das Viellinienspektrum des Wasserstoffs (also ruhendes Leuchten, bei bewegtem ist es äußerst schwach) im Kanalstrahl von Hrn. Rupp mit großer Intensität vorhanden war. Die Bahn des Kanalstrahles leuchtete sehr hell durch die ganze Länge des Beobachtungsraumes (etwa 15 cm), ohne daß eine Abklingung bemerkbar war.

Meine Pumpleitung war etwa 60 cm lang bei einem Querschnitt von etwa 13 cm^2 ; mein Kanal war 55 mm lang und 2,5 mm weit; an seiner Einmündung in den Beobachtungsraum war ein Aufsatz mit einer Bohrung von 1 mm Weite und 2 mm Tiefe angebracht. Daß ich einen reinen abklingenden Strahl hatte, ist aus meiner Arbeit zu ersehen (Druck im Beobachtungsraum $8 \cdot 10^{-4} \text{ mm Hg}$).

4. Hr. Rupp hat mir einige seiner Versuche vorgeführt. Bei einem Versuch wurde nicht der Kanalstrahl im Beobachtungsraum, sondern der Pinsel im Entladungsrohr anvisiert, in welchem ruhendes und bewegtes Leuchten gemischt vorhanden sind. Das Interferometer war auf einen Gangunterschied von 20 cm eingestellt; Hr. Rupp gab an, es auf das *bewegte* Leuchten justiert zu haben. Trotzdem habe ich deutliche Interferenzen nur dann gesehen, wenn durch plötzliches Verdampfen von Quecksilber eine starke, momentane Glimmentladung durch die Röhre ging, wobei Kanalstrahl und Pinsel wegen des Zusammenbruchs der Spannung verschwanden. Diese Glimmentladung liefert natürlich nur ruhendes Leuchten.

ruhendes Leuchten auftritt. Ich wandte die am Ende dieses Abschnittes beschriebene Pumpleitung, eine 70 mm lange Kathode und eine vierstufige Stahlpumpe an. Im Beobachtungsraum erhielt ich bei normaler Entladung einen Druck von $6 \cdot 10^{-4} \text{ mm Hg}$ mit einem Kanal von 2 mm Weite. Da das Ruheleuchten schon bei einem Druck von 10^{-3} mm Hg bemerkbar wird, darf im vorliegenden Falle der Kanal nicht wesentlich weiter als 2 mm sein.

keine
von
ware
einen
Denn
App
Erw

Rup
feren
hom
Ges
Ein
schw
aber
Gren

feren
der
Erw
Inte
mut
Leu
spie
schv

auch
zeig
Ein
es
fero
so
verg
kön
Ber

Vom Licht des Kanalstrahles selbst konnte ich zwar keine Interferenzen sehen, doch bezweifle ich nicht, daß die von Hrn. Rupp photographierten Interferenzen vorhanden waren. Aber ich führe die Existenz dieser Interferenzen auf einen anderen Grund zurück, als es Hr. Rupp getan hat. *Denn ich schließe aus diesen meinen Beobachtungen an der Apparatur von Hrn. Rupp, daß die Aufnahmen in seiner Erwiderung die Interferenzen des ruhenden Leuchtens darstellen.*¹⁾

Die große Schärfe der Interferenzen in Fig. 2 der Ruppischen Erwiderung stützt diese Ansicht. Scharfe Interferenzen bei 20 cm Gangunterschied liefert nur eine sehr homogene, ruhende Lichtquelle oder ein hinsichtlich der Geschwindigkeit streng homogener Kanalstrahl nach der Einsteinschen Kompensation des Dopplereffektes. Die Geschwindigkeit der leuchtenden Teilchen im Kanalstrahl variiert aber, wie alle Dopplereffektaufnahmen beweisen, in weiten Grenzen.

In der Akademiearbeit gibt Hr. Rupp an, die Interferenzen des ruhenden Leuchtens erhalten zu haben, wenn der Dopplereffekt nicht kompensiert war. In Fig. 3 seiner Erwiderung, die diesen Fall darstellen soll, sind aber keine Interferenzen vorhanden. Dies besonders führt zu der Vermutung, daß das Interferometer von Anfang an auf ruhendes Leuchten eingestellt war. Bei einer Verstellung des Drehspiegels würden dann natürlich die Interferenzen verschwinden.

5. Mit der Apparatur, welche Hr. Rupp mir, wie wohl auch den Herren Czerny, Pringsheim und Ramsauer gezeigt hat, kann der Nachweis *nicht* erbracht werden, daß die *Einsteinschen* Interferenzen vorhanden waren. Hierzu hätte es einer Aufnahme des Dopplereffektes, eines stabileren Interferometers und eines mikrometrisch drehbaren Spiegels bedurft, so daß eine meßbare und mit der theoretischen Berechnung vergleichbare Umstellung des Drehspiegels vorgenommen werden könnte. Ohne diesen Versuch verliert meines Erachtens die Berufung auf das bloße Sehen der Interferenzen durch andere

1) Vgl. meinen Versuch mit reinem Ruheleuchten, H. Straub, a. a. O., S. 654.

Fachgenossen ihren beweisenden Wert zur Aufklärung dieser Frage.

Auch die von Hrn. Rupp an meiner Arbeit ausgeübte Kritik möchte ich nicht unwidersprochen lassen.

6. Die Hauptaufgabe meiner Arbeit war, zu untersuchen, ob im Kanalstrahl (bei Kompensation des Kanalstrahlen-Dopplereffektes mittels der Einsteinschen Spiegeldrehung) die Kohärenzlänge der Wasserstofflinien größer ist, als es der durch den thermischen Dopplereffekt verursachten Linienbreite entspricht (Kohärenzlänge von H_{β} etwa 3 cm). Hr. Rupp hat dies in seiner ersten Arbeit über die Interferenz des Kanalstrahllichtes¹⁾ behauptet und in der zweiten²⁾ ausdrücklich bestätigt.³⁾ Er gibt einmal an, Interferenzen von H_{β} bei 15,2 cm, das andere Mal bei etwa 10 cm beobachtet zu haben. In der Akademiearbeit wird auf S. 350 angegeben: „... daß der größterreichte Gangunterschied von H_{β} = 15,2 cm durch empirische Kompensation der Querkomponenten der Strahlgeschwindigkeit in derselben Weise erreicht wurde wie hier beim Spiegeldrehversuch...“

Den Beweis, daß im reinen Abkingleuchten des Kanalstrahles die Kohärenzlänge von H_{α} kleiner bleibt als 2 mm, im reinen Ruheleuchten aber annähernd denselben Wert erreicht wie beim Geißlerrohr, habe ich in meiner Arbeit erbracht. Diesem Hauptresultat hat Hr. Rupp nicht widersprochen.

Die von ihm nunmehr beschriebenen Interferenzen hohen Gangunterschiedes an H_{β} sollen nach seiner neuen Mitteilung⁴⁾ dadurch entstehen, daß die Abhängigkeit der Radien der Interferenzkreise von der Lichtwellenlänge durch eine Drehung der Kompensatorplatte im Michelson-Interferometer kompensiert wird.⁵⁾

1) E. Rupp, Ann. d. Phys. 79. S. 1. 1926.

2) E. Rupp, Berl. Ber. 25. S. 341. 1926.

3) Vgl. R. d'E. Atkinson, Naturw. 14. S. 599. 1926.

4) Rupp'sche Erwiderung, S. 384, Anm. 1.

5) Vgl. die Achromatischen Interferenzen von R. W. Wood, Physical Optics, S. 116. 1905.

Ich konnte aber an Hand einer mir vorgelegten Rupp'schen Originalaufnahme feststellen, daß der wirkliche Gangunterschied, welcher die Interferenzen geliefert hat, höchstens 12 mm und nicht 90 mm betragen kann. Deshalb besteht hier kein Widerspruch gegen mein Ergebnis am Wasserstoffkanalstrahl.

Ich halte es für möglich und wahrscheinlich, daß diese Interferenzen durch Zusammenwirken von Verteiler- und Kompensatorplatte des Interferometers entstanden sind. Auch bei meinen Versuchen konnte ich einmal ein derartiges Zusammenwirken feststellen. Der Gangunterschied dieser falschen Interferenzen hing nur von der Stellung und wahrscheinlich von der Dicke der beiden Platten ab, während die Abstände der Interferometerspiegel von der Verteilerplatte keinen Einfluß hatten.

7. Die Behauptung, ich hätte mein Interferometer nur beim Gangunterschied Null justiert und andere Gangunterschiede durch bloße Schlittenverschiebung hergestellt, beruht auf einem Irrtum. In meiner Arbeit (S. 651) habe ich angegeben: „Bei den Aufnahmen wurde das Interferometer für jeder Gangunterschied mit dem Quecksilber-Geißlerrohr scharf justiert . . .“ Dann versuchte ich, mit reinem bewegtem Leuchten bei Gangunterschieden von 0—10 cm¹⁾, durch Drehen des einen Spiegels Interferenzen wieder herzustellen, also genau so, wie es Hr. Rupp in der Akademiearbeit (S. 348) beschreibt. Erst in seiner Erwiderung (S. 381) gibt er im Gegensatz zu seiner früheren Darstellung an, das Interferometer mit dem Licht bewegter Atome justiert zu haben.

8. Hrn. Rupp's Bemerkung: „Es gelang ihm (Straub) aber nicht, die von mir (Rupp) benutzten Gangunterschiede zu erhalten. Vielmehr beträgt bei ihm der größterreichte Gangunterschied bei Quecksilberkanalstrahlen 0,7 mm“, verleitet zu einer unrichtigen Auffassung meiner Versuche: Bei

1) Zur Orientierung sei bemerkt, daß meine Schlittenführung so sorgfältig geschliffen war, daß eine Verschiebung vom Gangunterschied 0—2 cm nur eine geringe Unschärfe der Interferenzen verursachte, daß von 2—7 cm dagegen die Interferenzen in voller Schärfe erhalten blieben. Bei noch größeren Gangunterschieden war die Führung nicht mehr so gut, aber auch hier mußte nur von Zentimeter zu Zentimeter ein wenig nachjustiert werden.

kontinuierlicher Verschiebung des einen Spiegels konnte ich beobachten, daß die Interferenzen des *reinen* bewegten Leuchtens bei 0,7 mm unscharf wurden und bei 1 mm verschwunden waren¹⁾, also bei Gangunterschieden, mit denen sie bei Glimmlicht noch ganz scharf waren.

München, Physikalisches Institut der Universität.
Dezember 1930.

1) H. Straub, a. a. O., S. 655.

(Eingegangen 28. Dezember 1930)

Ich habe meiner Erwiderung auch nach Kenntnisnahme der folgenden Antwort von Hrn. Rupp nichts hinzuzufügen.

Harald Straub.

(Eingegangen 2. Februar 1931)

Antwort
auf die vorstehende Bemerkung von H. Straub
Von E. Rupp

(Mit 2 Figuren)

Der wesentliche Inhalt der vorstehenden Bemerkung des Hrn. Straub besteht in der Behauptung, daß die von mir beobachteten Interferenzen dem ruhenden Leuchten zukämen. Sein Beweis ist dabei indirekt, indem er auf die Schwäche der ihm gezeigten Apparatur hinweist und so den Eindruck zu erwecken sucht, daß meine Angaben schon aus diesem Grunde nicht vollwertig sein könnten. Meine jetzige Apparatur hatte allerdings den Charakter des Improvisierten im Gegensatz zu meinen früheren Versuchen, die mit aller Sorgfalt aufgestellt waren. Trotzdem bin ich der Ansicht, daß die Ergebnisse mit dieser Apparatur beweiskräftig sind, und möchte diese Ansicht durch die folgenden Ausführungen stützen:

1. Hr. Straub beschreibt meine Apparatur offenbar aus dem Gedächtnis; es sind ihm daher leider eine Reihe Versehen unterlaufen, von denen ich nur die wichtigsten berichtigen möchte. Der Drehspeigel in meinem Interferometer wird mittels einer Feder über ein Kugelgelenk gegen drei Mikrometerschrauben gepreßt. Durch Drehen an einer dieser Schrauben kann er um eine Achse, die senkrecht zur Ebene Kanalstrahl-Lichtstrahl steht, geschwenkt werden. Zur Umstellung der Interferenzen für ruhendes Leuchten auf bewegtes Leuchten wird im Gegensatz zu den Angaben von Hrn. Straub nur an dieser einen Schraube gedreht. Bei den Aufnahmen fehlte der Spaltaufsatz nicht, vielmehr wurde ein Spalt von 1,2 mm Weite verwendet, wie man aus der Strahlbreite von Fig. 1 dieser Mitteilung ersieht.

2. Hr. Straub gibt an, die in meiner Erwiderung¹⁾ mitgeteilten Aufnahmen seien nicht beweiskräftig für das Vorhandensein von bewegtem Leuchten. Er hat mir diese Gedanken auch während seines Besuchs mitgeteilt und ich habe daraufhin die Kanalstrahlinterferenzen erneut photographiert unter *Abbildung des Kanalstrahls*. Da Hr. Straub diese Aufnahmen im Gegensatz zu der recht ausführlichen Beschreibung aller nach seiner Ansicht für ihn günstigen Punkte überhaupt nicht erwähnt, sei es mir gestattet, hier zwei davon wiederzugeben.

Fig. 1a zeigt, daß abklingendes Leuchten vorlag, wie man an der Intensitätsabnahme von links nach rechts in Fig. 1a



Kanalstrahl, 18 kV, abklingendes
Leuchten (Intensitätsabnahme von
links nach rechts)

Abstand Linse ($f = 40$ cm) —

Kanalstrahl = 40 cm

Abstand Linse ($f = 40$ cm) —

Drehspiegel = 39 cm

Kameralinse $f = 36$ cm

Deutliche Interferenzen

Fig. 1a

Interferenzen der Hg-Linie $546\text{ m}\mu$ bei 20 cm Gangunterschied
Natürliche Größe



Kanalstrahl wie Fig. 1a

Abstand Linse ($f = 40$ cm) —

Drehspiegel = 30 cm

Abbildungsbedingung also nicht
erfüllt, daher keine Interferenzen

Fig. 1b

erkennt. Bei der Aufnahme wurde der Kanalstrahl im Unendlichen abgebildet. Abstand Kanalstrahl-Linse 40 cm, Brennweite der Linse 40 cm, Abstand Linse-Drehspiegel 39 cm. Der Abstand der Interferenzstreifen ist in Übereinstimmung mit dem Gangunterschied, wie Hr. Straub die Freundlichkeit hatte nachzuprüfen.

Fig. 1b zeigt, daß die Interferenzen verschwinden, wenn die Einsteinsche Abbildungsbedingung nicht erfüllt ist. Dazu wurde der Abstand Linse-Drehspiegel auf 30 cm verkürzt.

1) E. Rupp, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 382. 1930.

Kämen die Interferenzen von ruhendem Leuchten, so könnten sie bei einer Verschiebung der abbildenden Linse nicht verschwinden. Außerdem zeigt die Aufnahme eindeutig, daß in meinen Versuchen die Einsteinsche Kompensation des Dopplereffekts vorlag, sonst hätten durch bloßes Verschieben der Linse die Interferenzen nicht verschwinden und wieder erscheinen können.

3. Diese (Hrn. Straub wohlbekannten) Aufnahmen beweisen also, a) daß *bewegtes Leuchten vorlag*, b) daß die *Einsteinsche Kompensation des Dopplereffekts mit der von ihm als untauglich geschilderten Apparatur durchgeführt werden konnte*. Aber abgesehen davon ist dieser Beweis auch bereits durch meine früheren Untersuchungen geliefert, denn ich habe keine Interferenzen mit Kanalstrahllicht erhalten, wenn mit Glimmlicht Interferenzen da waren und umgekehrt. Aus Fig. 1 und Fig. 2 meiner Erwiderung ist zu ersehen, daß die Interferenzen verschwanden, wenn das ruhende Leuchten durch das bewegte Leuchten des Kanalstrahls ersetzt wurde, ohne eine sonstige Änderung an der Apparatur.

Ebenso war der Drehwinkel in Übereinstimmung mit der Einsteinschen Theorie; die Drehrichtung war von der Richtung des Kanalstrahls abhängig.¹⁾

In der hier aufgeworfenen Streitfrage steht also Behauptung gegen Behauptung. Die Versuche mögen von dritter Seite aufgenommen werden, zumal Hr. Straub sich gegenüber meinem Vorschlag, er möge mit seiner Apparatur zu mir kommen, damit ich ihm an seiner eigenen Apparatur die gesuchten Interferenzen zeige, ablehnend verhalten hat.

Berlin, AEG-Forschungs-Institut, 13. Januar 1931.

Anmerkung: Von der Frage nach der Durchführbarkeit des Einsteinschen Spiegeldrehversuchs unabhängig ist die Frage nach den Interferenzen mit Wasserstoffleuchten. Die von mir früher²⁾ mitgeteilten großen Interferenzweglängen des Wasserstoffleuchtens sind theoretisch nicht verständlich, wie ich bereits in der Akademiearbeit³⁾ hervorgehoben

1) E. Rupp, Berliner Berichte 1926, S. 348.

2) E. Rupp, Ann. d. Phys. 79. S. 1. 1926.

3) S. 349.

habe. Mit dem Einsteinschen Spiegeldrehversuch stehen sie in keinem Zusammenhang. Auch habe ich jetzt mit der *normalen* Michelsonschen Anordnung bei 9,5 cm Gangunterschied keine Interferenzen erhalten. Wohl aber erhielt ich Interferenzen, wenn die Kompensatorplatte mit der Verteilerplatte einen spitzen Winkel bildete, wie ich am Schluß meiner Erwiderung erwähne. Ich konnte inzwischen nachweisen, daß es sich um Queteletsche Streifen an der Verteilerplatte P_1 gehandelt hat. Die eine Seite der Platte P_1 ist halbdurchlässig versilbert, die andere Seite kann sich leicht mit einer dünnen Staubschicht bedecken. Durch die Verstellung der Kompensatorplatte P_2 gegenüber P_1 wird ein größerer Bruchteil des von S_2 kommenden Lichtes aus dem Strahlengang herausreflektiert. Wirksam bleibt im wesentlichen das Licht im Arm $P_1 S_1$, so daß Queteletsche Streifen zwischen dem Licht, das an der Vorderseite von P_1 reflektiert wird, und dem Licht, das an der versilberten Rückseite von P_1 reflektiert wird, entstehen können. Die Streifen verhalten sich in mancher Hinsicht wie Michelsonsche Interferenzen. So bestehen sie aus Kreisbögen, die im Unendlichen liegen. Sie verschwinden bei Abdecken des Lichtes zwischen Verteilerplatte und Spiegel S_1 , sowie bei einer geringen Schwenkung von S_1 . Es ist möglich, daß in meiner früheren Untersuchung mit Wasserstofflicht Queteletsche Streifen ebenfalls eine Rolle gespielt haben, soweit es sich dort um Weglängen über 3 cm handelt, zumal damals bei der großen Lichtschwäche die Abstände der Interferenzstreifen mit dem benutzten Fernrohr nicht gemessen werden konnten.

(Eingegangen 15. Januar 1931)

Lösun
licher
eines
quers
auf, s
der I
Stabe
bekan
sich
änder
Quer
und

ander
Breit
folge
sogen

Hier
Quad
Mate

**Methode zur angenäherten Lösung
von Eigenwertproblemen mit Anwendungen
auf Schwingungsprobleme**

Von W. Meyer zur Capellen¹⁾

(Mit 12 Figuren)

I. Einleitung

Die im folgenden dargestellte Methode zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen sei zunächst ihrem anschaulichen Gehalt nach erläutert an den Biegungsschwingungen eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt: Weist der Stabquerschnitt nur geringe Änderungen gegenüber einem konstanten auf, so ist anzunehmen, daß die Formen und die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen des Stabes nur wenig von denen des Stabes mit konstantem Querschnitt abweichen, für welchen sie bekannt sind. Weist er größere Änderungen auf, so werden sich auch Schwingungszahlen und Schwingungsformen stärker ändern: zum mindesten ist mit einer stetigen Änderung des Querschnittes eine stetige Änderung der Schwingungszahlen und Schwingungsformen verbunden.

Ist z. B. der Stab an einem Ende fest eingespannt, am anderen frei und hat er konstante Höhe bei linear abnehmender Breite, so wird man — Einzelheiten vgl. unter III. d) — auf folgende Differentialgleichung für die Schwingungsform u , die sogenannte *Eigenfunktion*, geführt:

$$u^{IV} - \lambda u - \frac{2\alpha}{1 - \alpha z} \cdot u''' = 0.$$

Hierin ist λ , der sogenannte *Eigenwert*, proportional dem Quadrat der Kreisfrequenz der Eigenschwingung und einer Materialkonstanten, während der Parameter α etwas über das

1) Darmstädter Dissertation.

Verhältnis der Stabbreiten am freien und am festen Ende aussagt. Für $\alpha = 0$, d. h. für konstanten Stabquerschnitt sind die Lösungen der Differentialgleichung, d. h. die Eigenfunktionen v_0 und die Eigenwerte λ_0 bekannt. Mit einer stetigen Änderung des Parameters α ändern sich auch Eigenfunktion u und Eigenwert λ in stetiger Weise, und es liegt der Gedanke nahe, den Eigenwert λ und die Eigenfunktion u darzustellen als Reihen geordnet nach steigenden Potenzen des Parameters α , welche für $\alpha = 0$ das *ungestörte* Problem, hier die Schwingung des Stabes mit konstantem Querschnitt ergeben, und welche entsprechend der Berücksichtigung der i -ten Potenz von α als i -te Annäherung zu bezeichnen sind.

Die Aufgabe ist nun die, für allgemeine Fälle diese Änderungen von Eigenwert und Eigenfunktion gegenüber dem ungestörten Problem zu ermitteln, Änderungen, die im übrigen von der Differentialgleichung und den Randbedingungen selbst vorgeschrieben werden, wie unten ausgeführt wird.

Der hier gegebene Gedankengang ist bis zur ersten Näherung — wenn auch formal zum Teil anders — von Schrödinger¹⁾ durchgeführt, auf dessen Aufsatz Herr Geh. Rat Prof. Dr. Horn, Darmstadt, mich aufmerksam machte und dadurch die vorliegende Arbeit anregte. Hierfür möchte ich ihm an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

II. Theoretische Entwicklung der Methode

a) Ableitung der allgemeinen Formeln

Die Methode sei entwickelt an der bei linearen Schwingungs- und Wärmeleitungsproblemen immer wiederkehrenden Differentialgleichung 2. Ordnung, der Sturm-Liouvilleschen. Sie sei gegeben in der Form:

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(p \cdot y') + \lambda \cdot y + q \cdot y = 0,$$

mit den bekannten Voraussetzungen über Stetigkeit und Endlichkeit der Koeffizienten p und q , welche Funktionen von x sind, und mit λ als Eigenwert. Sollte das Glied $\lambda \cdot y$ noch mit einem Faktor $\varrho(x)$ behaftet sein, so kann man durch eine

1) E. Schrödinger, „Quantisierung als Eigenwertproblem“, Ann. d. Phys. [4] 80. S. 440. 1926.

einfache Transformation die obige Form herstellen. Die Randbedingungen des Problems an den Stellen $x = a$ und $x = b$ sind als *homogen* vorauszusetzen, d. h.:

$$(2) \quad y(a) + h \cdot y'(a) = 0 \quad \text{und} \quad y(b) + H \cdot y'(b) = 0.$$

Die Funktionen p und q seien nun folgendermaßen darstellbar:

$$(3a) \quad p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots + \alpha^k p_k + \dots,$$

$$(3b) \quad q = q_0 + \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 + \alpha^3 q_3 + \dots + \alpha^k q_k + \dots,$$

wo α ein Parameter ist, dessen höhere Potenzen klein werden derart, daß auch $\alpha^k p_k$ und $\alpha^k q_k$ klein werden für entsprechend große Werte k . Die Funktionen p_0 und q_0 seien so beschaffen, daß die Lösung der Gleichung

$$(4) \quad \frac{d}{dx}(p_0 \cdot y') + \lambda_0 y + q_0 \cdot y = 0$$

für die gleichen Randbedingungen, wie beim Problem (1) bekannt und leicht anzugeben ist. Die Eigenfunktionen $v_{1,0}$, $v_{2,0}$, $v_{3,0}$, ..., $v_{n,0}$ mit den Eigenwerten $\lambda_{1,0}$, $\lambda_{2,0}$, $\lambda_{3,0}$, ..., $\lambda_{n,0}$, welche (2) und (4) befriedigen, mögen normiert sein, d. h.

es sei $\int_a^b v_{n,0}^2 dx = 1$. Die Eigenfunktionen sind außerdem bekanntlich orthogonal, d. h.

$$\int_a^b v_{m,0} \cdot v_{n,0} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Die Lösungen des Problems (1) und (2) seien nunmehr: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Da nach den allgemeinen Untersuchungen von Courant und Hilbert die Eigenwerte und Eigenfunktionen in stetiger Weise von den Koeffizienten der sie erzeugenden Differentialgleichung abhängen, seien für die n -te Eigenfunktion und den n -ten Eigenwert folgende Ansätze gemacht:

$$(5a) \quad u_n = v_{n,0} + \alpha v_{n,1} + \alpha^2 v_{n,2} + \alpha^3 v_{n,3} + \dots + \alpha^i v_{n,i},$$

$$(5b) \quad \lambda_n = \lambda_{n,0} + \alpha \epsilon_{n,1} + \alpha^2 \epsilon_{n,2} + \alpha^3 \epsilon_{n,3} + \dots + \alpha^i \epsilon_{n,i};$$

dabei sind die $v_{n,i}$ Funktionen von x , welche die Randbedingungen (2) erfüllen, und die $\epsilon_{n,i}$ Konstanten, welche man als i -te Eigenwertänderung bezeichnen könnte.

Um die Häufung von Indizes zu vermeiden, sei im folgenden der Index n fortgelassen mit der Bemerkung, daß es sich um den n -ten Eigenwert und die n -te Eigenfunktion handeln soll. — Setzt man nunmehr die Gl. (5) in (1) ein und vergleicht die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen von α , so erhält man eine Folge von Differentialgleichungen. Z. B. erhält man für die 0-te Potenz von α die Gl. (4). Für die 1. Potenz findet man

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(p_0 v_1') + \lambda_0 v_1 + q_0 v_1 \\ = -\frac{d}{dx}(p_1 v_0') - q_1 v_0 - \varepsilon_1 v_0 = f_1(x) \end{cases}$$

und für die zweite

$$(7) \quad \frac{d}{dx}(p_0 v_2') + \lambda_0 v_2 + q_0 v_2 = f_2(x),$$

wo

$$f_2(x) = -\frac{d}{dx}(p_1 v_1') + p_2 v_0' - \varepsilon_1 v_1 - \varepsilon_2 v_0 + q_1 v_1 + q_2 v_0,$$

und schließlich für die i -te Potenz von α

$$(8) \quad \frac{d}{dx}(p_0 v_i') + \lambda_0 v_i + q_0 v_i = f_i(x),$$

wo

$$(8a) \quad f_i(x) = -\sum_{k=1}^{k=i} \left[\frac{d}{dx}(p_k v_{i-k}') + q_k v_{i-k} + \varepsilon_k v_i v_{i-k} \right].$$

Aus dem Aufbau der Gl. (6) bis (8a) erkennt man, daß die ε_i und die v_i nacheinander bestimmt werden müssen: Zunächst ε_1 , dann aus (6) v_1 , dann ε_2 und aus (7) v_2 usw.

Betrachtet man zunächst die inhomogene Differentialgleichung (6), so ist ihre linke Seite dieselbe wie die homogene des ungestörten Problems (4). Nun folgt aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen¹⁾, daß die inhomogene Gleichung nur dann eine Lösung haben kann, wenn die rechte Seite orthogonal ist zur Lösung der homogenen Gleichung. D. h. also es muß sein:

$$(9a) \quad \int_a^b f_1(x) v_0(x) dx = 0.$$

1) Vgl. z. B.: L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen.

Setzt man in (9a) den Wert für $f_1(x)$ ein, so folgt, da ja v_0 normiert ist:

$$(9b) \quad \varepsilon_1 = - \int_a^b \frac{d}{dx} (p_1 v_0') v_0 dx - \int_a^b q_1 v_0^2 dx.$$

Da die rechte Seite von (6) nunmehr nach (9b) bekannt ist, kann v_1 berechnet werden — auf welche Weise, sei unten angedeutet.

Zur Vereinfachung der weiteren Rekursionsformeln sei noch die Bedingung gestellt, daß

$$(10) \quad \int_a^b v_i v_0 dx = 0 \quad (i \neq 0),$$

was immer erreicht werden kann. Aus Gl. (7) folgt wieder mit

$$\int_a^b f_2(x) v_0 dx = 0 \text{ und mit (10), daß}$$

$$(11) \quad \varepsilon_2 = - \int_a^b \frac{d}{dx} (p_1 v_1' + p_2 v_0') v_0 dx - \int_a^b (q_1 v_1 + q_2 v_0) v_0 dx.$$

Durch Bestimmung der zweiten Eigenwertänderung ε_2 ist jetzt f_2 bekannt, und es kann aus (7) ebenfalls v_2 bestimmt werden.

Führt man nun die Betrachtung für $i = 3, 4$ usw. fort,

so ergeben sich schließlich — immer mit $\int_a^b f_i(x) \cdot v_0 dx = 0$ —

folgende Beziehungen:

$$a) \quad \int_a^b v_i v_0 dx = 0, \text{ d. h. } \int_a^b v_0 u dx = 1.$$

b) Die Eigenwertänderungen können aus Rekursionsformeln berechnet werden:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_i &= - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{k=i} p_k v_{i-k}' \right) v_0 dx \\ &\quad - \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{k=i} q_k v_{i-k} \right) v_0 dx. \end{aligned} \right.$$

c) Die v_i bestimmen sich aus den Differentialgleichungen:

$$(13) \quad \frac{d}{dx} (p_0 v_i') + \lambda_0 v_i + q_0 v_i = f_i(x),$$

wo

$$(14) \quad f_i(x) = - \sum_{k=1}^{k=i} \left[\frac{d}{dx} (p_k v_{i-k}') + q_k \cdot v_{i-k} + \varepsilon_k \cdot v_{i-k} \right].$$

Dabei gilt $i \neq 0$ für a, b, c.

Man kann auch nachträglich durch Einsetzen der Formeln in die Ausgangsdifferentialgleichung (1) die Richtigkeit verifizieren. — Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (13) sei bemerkt, daß diese auf Grund der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden kann. Es läßt sich dann nachweisen, daß die auf diesem Wege erhaltene Funktion \bar{v}_i , die eine partikuläre Lösung ist, ohne weiteres die Randbedingungen erfüllt. Als Gesamtlösung hat man dann

$$(15) \quad v_i = \bar{v}_i + K_i v_0,$$

wo K_i so bestimmt wird, daß $\int_a^b v_i v_0 dx = 0$, d. h.

$$(15a) \quad K_i = - \int_a^b \bar{v}_i v_0 dx.$$

Einzelheiten vergleiche man in den Anwendungsbeispielen.

Die Entwicklungen rufen zunächst den Eindruck hervor, als ob die Methode nur Sinn hat bei kleinem Parameter α . Tatsächlich zeigen die Anwendungsbeispiele eine günstigere Verwendungsmöglichkeit. Ein Konvergenzbeweis soll hier nicht gegeben werden. — Setzt man in den obigen Entwicklungen $p = p_0$, d. h. p_1, p_2 usw. = 0 und q_2, q_3 usw. = 0 und führt die Entwicklung nur bis $i = 1$ durch, d. h. berücksichtigt nur die erste Potenz von α , so stimmen die soeben angegebenen Formeln mit denen von Schrödinger überein.

Das geschilderte Verfahren läßt sich auch entwickeln für Differentialgleichungen höherer Ordnung, wie es später für eine solche 4. Ordnung angegeben werden soll, und auch für sogenannte „belastete“ Probleme, bei welchen durch die Natur

der Randbedingungen die Eigenfunktionen nicht mehr orthogonal zueinander sind, was weiter unten ebenfalls für ein bestimmtes Beispiel behandelt werden soll.¹⁾

b) **Erläuterung an einigen einfachen, leicht nachprüfbaren Beispielen**

Als Grundgleichung, als ungestörtes Problem für die folgenden Beispiele sei genommen: $u''(x) + \lambda u(x) = 0$.

1. Störung durch ein Glied, das u enthält

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1) \quad u''(x) + \lambda u(x) - \alpha u(x) = 0,$$

mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$.

Die Lösung ist das normierte System der Orthogonalfunktionen:

$$(2) \quad u_n(x) = \sqrt{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda_n - \alpha} x = \sqrt{2} \cdot \sin n \pi x$$

mit den Eigenwerten $\lambda_n = n^2 \pi^2 + \alpha$, wo $n = 1, 2, 3, \dots$. Wendet man auf Gl. (1) die Störungstheorie an, so sei die Ausgangsgleichung für das ungestörte Problem (Index n fortgelassen): $v_0'' + \lambda_0 \cdot v_0 = 0$, wo

$$(3) \quad v_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

und $\lambda_0 = n \cdot \pi$, ($n = 1, 2, \dots$). Das Störungsglied ist dann $-\alpha \cdot u(x)$ d. h. in den allgemeinen Ableitungen ist zu setzen:

$p_0 = 1$, sämtliche p mit höherem Index gleich Null.

$q_0 = 0$, $q_1 = -1$, sämtliche q mit höherem Index gleich Null.

Dann wird die Differentialgleichung für v_1 :

$$(4) \quad v_1'' + \lambda_0 \cdot v_1 = 1 \cdot v_0 - \varepsilon_1 \cdot v_0.$$

Also wird $\varepsilon_1 = 1$ und damit die rechte Seite von (4), d. h. $f_1(x) \equiv 0$. Die Lösung von (4) ist aber zunächst

$$(5) \quad v_1 = C \cdot \sin \sqrt{\lambda_0} x = C \cdot v_0.$$

Nun soll aber v_1 orthogonal sein zu v_0 , d. h. also die Konstante C muß verschwinden, also wird $v_1 \equiv 0$.

Für v_2 ergibt sich die Differentialgleichung

$$(6) \quad v_2'' + \lambda_0 v_2 = -\varepsilon_2 \cdot v_0 - \varepsilon_1 v_1 + 1 \cdot v_1 = -\varepsilon_2 \cdot v_0,$$

also wird $\varepsilon_2 = 0$ und weiter folgt wie oben $v_2 \equiv 0$.

Für die folgenden ε_i und v_i ergibt sich analog:

$$\varepsilon_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots), \quad v_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

1) Die Entwicklung des Verfahrens für homogene, lineare Integralgleichungen mit symmetrischem Kern wird vom Verfasser in einer besonderen Arbeit behandelt.

Somit erhält man als Lösung

$$(7) \quad \lambda = \lambda_0 + \alpha = n^2 \pi^2 + \alpha,$$

$$(8) \quad u = \sqrt{2} \cdot \sin n \pi x.$$

d. h. genau dasselbe Ergebnis, wie es elementar bereits in Gl. (2) gefunden war.

2. Störung durch ein Glied, das w' enthält

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(9) \quad u''(x) + \beta \cdot u'(x) + \lambda \cdot u(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Ihre Lösung ist:

$$(10) \quad u = c \cdot e^{-\frac{\beta x}{2}} \cdot \sin n \pi x,$$

und $\lambda_n = n^2 \pi^2 + \frac{\beta^2}{4}$ ($n = 1, 2, \dots$), wo c die Normierungskonstante ist.

Um die Annäherungsmethode anwenden zu können, muß die Differentialgleichung (9) umgeformt werden in eine solche, bei der die Eigenfunktionen tatsächlich orthogonal sind. Durch die Transformation

$$(11a) \quad u = w \cdot e^{-\frac{\beta x}{2}}$$

wird aus (9) die folgende Gleichung:

$$(11) \quad w'' + \lambda \cdot w - \frac{\beta^2}{4} w = 0.$$

Die genaue Lösung für (11) ist dann

$$(12) \quad w = \sqrt{2} \cdot \sin n \pi x \quad \text{und} \quad \lambda_n = n^2 \pi^2 + \frac{\beta^2}{4}.$$

Als ungestörte Gleichung hätte man, wenn man auf w die allgemeinen Entwicklungen anwendet:

$$(11b) \quad v_0'' + \lambda_0 \cdot v_0 = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = n^2 \pi^2 \quad \text{und} \quad v_0 = \sqrt{2} \cdot \sin n \pi x.$$

Das Störungsglied ist dann $-\frac{\beta^2}{4} w(x)$. Setzt man $\frac{\beta^2}{4} = \alpha$, so hat man das in b 1) behandelte Beispiel vor sich, so daß die Lösung von (11) auf dem Wege der Annäherungsmethode zum exakten Ergebnis (12) bzw. (10) führt.

3. Störung durch ein Glied, das u'' enthält

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(13) \quad (1 - \alpha) \cdot u''(x) + \lambda \cdot u(x) = 0, \quad (\alpha < 1)$$

mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Die exakte Lösung ist:

$$(14) \quad u = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{2n-1}{2} \pi x \quad \text{und} \quad \lambda_n = (1 - \alpha) \cdot \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}.$$

Als ungestörtes Problem sei gewählt:

$$(15) \quad v_0'' + \lambda_0 \cdot v_0 = 0$$

mit der Lösung

$$(15a) \quad v_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{2n-1}{2} \pi x \quad \text{und} \quad \lambda_0 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}.$$

Das Störungsmitglied ist also $-\alpha \cdot u''(x)$, und es sind hier $p_0 = 1$, $p_1 = -1$, sämtliche p mit höherem Index gleich Null und sämtliche q gleich Null.

Die Differentialgleichung für v_1 lautet:

$$(16) \quad v_1'' + \lambda_0 \cdot v_1 = -\varepsilon_1 \cdot v_0 + v_0'' = -(\varepsilon_1 + \lambda_0) \cdot v_0 = f_1(x).$$

Also wird $\varepsilon_1 = -\lambda_0$, d. h. $f_1(x) \equiv 0$.

Wie im Beispiel b 1) folgt, daß sämtliche Eigenwertänderungen außer dem ersten und sämtliche v_i außer v_0 verschwinden, so daß $\lambda = \lambda_0 - \alpha \lambda_0 = (1 - \alpha) \cdot \lambda_0$, wie in Gl. (14) schon gefunden.

III. Anwendung auf Schwingungsprobleme

a) Die Längsschwingungen eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt

1. Wenn F den veränderlichen Querschnitt eines Stabes von der Länge l bezeichnet, E seinen Elastizitätsmodus, γ sein spez. Gewicht, und der Stab an der Stelle x zur Zeit t eine Auslenkung $y = y(x, t)$ erfährt, so lautet die Differentialgleichung für die als klein vorausgesetzten freien Längsschwingungen des Stabes:

$$(1) \quad \frac{F \cdot \gamma}{E \cdot g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

Macht man für die Schwingung den Ansatz

$$(2) \quad y = u(x) \sin \omega t \quad \text{und setzt} \quad \frac{\gamma \cdot \omega^2}{E \cdot g} = \lambda',$$

so erhält man

$$(3) \quad \frac{d}{dx} (F \cdot u') + \lambda' \cdot F \cdot u = 0,$$

welche man durch Zurückführung auf einen Stab von der Länge 1, d. h. durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = \frac{x}{l}$ mit $\lambda = \lambda' \cdot l^2$ auf die Form bringen kann:

$$(4) \quad \frac{d}{dz} (F \cdot u') + \lambda \cdot F \cdot u = 0.$$

Man erhält also eine Gleichung von der unter II. a (1) behandelten Form, wenn man durch eine passende Transformation

das Glied bei $\lambda \cdot u$ fortschafft. Dies erreicht man dadurch, daß man setzt

$$(5) \quad u(z) = \frac{w(z)}{\sqrt{F(z)}}$$

und dann für w folgende Differentialgleichung erhält:

$$(6) \quad w''(z) + \lambda w(z) + q(z) w(z) = 0,$$

wo

$$(6a) \quad q(z) = -\frac{1}{2\sqrt{F}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{F'}{\sqrt{F}} \right).$$

Wenn der Stab kreisförmigen Querschnitt hat, also $F = r^2 \pi$, so folgt

$$(6b) \quad q(z) = -\frac{r''(z)}{r(z)}.$$

Zur Lösung der Gleichung (4) seien wieder wie unter II *homogene Randbedingungen* vorausgesetzt:

$$(7) \quad u(0) + h \cdot u'(0) = 0, \quad u(1) + H \cdot u'(1) = 0,$$

d. h. es sei angenommen, daß der Stab elastisch gelagert ist; denn die elastischen Rückstellkräfte der Unterlagen an den Enden sind h und H umgekehrt proportional, während die vom Stab übertragene Kraft proportional u' ist. Für $h = H = \infty$ hätte man den Fall des frei-freien Stabes, für $h = 0$ und $H = \infty$ den des an einem Ende festen, am anderen Ende freien Stabes und für $h = H = 0$ den Fall des beiderseits fest eingespannten Stabes. Durch die Transformation (5) gehen die homogenen Randbedingungen (7) für u in homogene Randbedingungen für w über, wie weiter unten am Beispiel gezeigt wird.

2. Vor der Anwendung der Näherungsmethode auf die Gleichung (6) seien noch *einige Fälle* zusammengestellt, wo die *Lösung* für die Schwingungen des Stabes mit veränderlichem Querschnitt *leicht anzugeben* sind:

a) $q(z) = 0$, d. h. $\frac{F'}{\sqrt{F}} = \text{const} = 2K_1$ oder mit einer zweiten Konstanten

$$(8) \quad F = (K_2 + K_1 z)^2; \quad K_2 = \sqrt{F_0}, \quad K_1 = \sqrt{F(1)} - \sqrt{F(0)}.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt bedeutet das, wie auch aus (6b) folgt, einen linearen Verlauf des Kreisdurchmessers. Die Lösung von (6) wird dann

$$(9) \quad w = c_1 \sin \sqrt{\lambda} z + c_2 \cos \sqrt{\lambda} z,$$

wo c_1/c_2 und λ aus den Randbedingungen zu finden sind.

$$\beta) q(z) = \text{const} = K^2.$$

Setzt man $\sqrt{F} = q(z)$, so folgt aus (6a): $q'' + K^2 q = 0$,
oder

$$(10) \quad \begin{cases} q(z) = \sqrt{F} = C_1 \sin Kz + C_2 \cos Kz, & \text{wenn } q > 0 \\ = C_1 \sin Kz + C_2 \cos Kz, & \text{wenn } q < 0. \end{cases}$$

Die Konstanten C_1, C_2 und K sind durch die Querschnittsform und den Querschnittsverlauf festgelegt. Die Lösung von (6) wird dann

$$(11) \quad w = c_1 \sin \sqrt{\lambda + K^2} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda + K^2} x;$$

c_1/c_2 und λ aus den Randbedingungen.¹⁾

$\gamma)$ Befolgt schließlich F ein Geradliniengesetz, so wird aus der Ursprungsgleichung (4):

$$(12) \quad u'' + \frac{a}{az+b} u' + \lambda u = 0,$$

welche sich mit Hilfe von $Z = \left(z + \frac{b}{a}\right) \cdot \sqrt{\lambda}$ in die Besselsche Differentialgleichung 0-ter Ordnung umformen läßt:

$$(13) \quad u''(Z) + \frac{1}{Z} u'(Z) + u(Z) = 0$$

mit der Lösung

$$(14) \quad u = c_1 J_0(Z) + c_2 Y_0(Z),$$

wo c_1/c_2 und λ wieder aus den Randbedingungen zu bestimmen sind. Wenn insbesondere $a = -b$, d. h. wenn der Stab in eine Spitze ausläuft, dann folgt $u = c_1 J_0[\sqrt{\lambda}(z-1)]$.

Man kann somit, wenn die Querschnittsform einen bestimmt vorgegebenen Verlauf hat, versuchen, ihn irgend einem der angeführten Fälle α bis γ anzunähern, falls nicht der Stab mit konstantem Querschnitt selbst dazu geeignet ist.

1) Fall α kann auch als Sonderfall von β abgeleitet werden.

3. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen sei nun ein bestimmter Querschnittsverlauf angenommen. Der Stab habe kreisförmigen Querschnitt, und sein Halbmesser r befolge das Gesetz

$$(15) \quad r = r_0(1 - \beta z)^2.$$

Außerdem sei der Stab an einem Ende ($z = 0$) fest eingespannt, am anderen ($z = 1$) frei, so daß die Randbedingung lautet: $u(0) = u'(1) = 0$. Dann nimmt das Glied $q(z)$ der Gleichung (6) die Gestalt an:

$$(16) \quad q(z) = -\frac{r''}{r} = -\frac{2\beta^2}{(1 - \beta z)^2} = -\alpha s(z),$$

wenn $\beta^2 = 2\alpha$ und $s = \frac{4}{(1 - \beta z)^2}$ gesetzt wird, so daß (6) die einfache Form erhält:

$$(17) \quad w'' + \lambda w - \alpha \cdot s \cdot w = 0.$$

Faßt man nun

$$(18) \quad v_0^{**} + \lambda_0^* v_0^* = 0.$$

[aus (17) durch Nullsetzen von α entstanden] als das „unge störte“ Problem auf, so könnte man jetzt sofort die in II.a entwickelten Beziehungen anwenden, indem sämtliche p und q verschwinden bis auf $p_0 = 1$ und q_1 nach (16). Die Lösung von (18) ist dann allgemein:

$$(19) \quad v_0^* = c_1 \sin \sqrt{\lambda_0^*} z + c_2 \cos \sqrt{\lambda_0^*} z.$$

Die Randbedingungen $u(0) = u'(1) = 0$ führen für $w = u\sqrt{F}$ [vgl. Gl. (5)] auf folgende, wiederum homogene Randbedingungen für w also auch für v_0^* :

$$(19a) \quad w(0) = 0, \quad w'(1) + \frac{2\beta}{1 - \beta} w(1) = 0,$$

d. h. also in (19) wird $c_2 = 0$ und der Eigenwert λ_0^* kann berechnet werden aus der transzendenten Gleichung:

$$(20) \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_0^*} = -\frac{1 - \beta}{2\beta} \sqrt{\lambda_0^*} = -h \cdot \sqrt{\lambda_0^*} = -h \cdot k_0$$

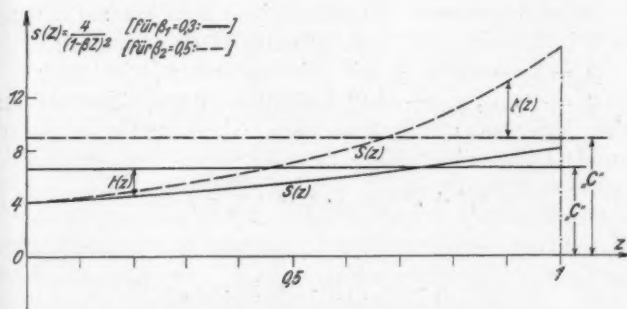
aus der man mit den üblichen Näherungsmethoden die Eigenwerte $\lambda_{n,0}^*$ oder auch $k_{n,0}$ ($n = 1, 2, \dots$) berechnen kann.

Hat man somit die Eigenwerte des ungestörten Problems, so ist das normierte Orthogonalsystem der Lösungen von (18) bestimmt durch

$$(21) \quad v_{n,0} = c_n \sin k_n z, \text{ wo } c_n = \frac{\sqrt{2}}{1 + h \cos^2 k_n}.$$

Nun könnte man auf (17) die allgemeine Theorie zur angenäherten Berechnung anwenden. Dabei trifft man z. B. bei Berechnung der ersten Eigenwertänderung auf ein Integral von

der Form $\int_0^1 v_0^2 s dz$. Um diese Eigenwertänderung von vorn-



Die „störende“ Funktion $s(z)$ bei den Längsschwingungen eines Stabes (ein Maß für die Veränderlichkeit des Querschnittes)

Fig. 1

herein klein zu machen, ist es zweckmäßig, folgenden Weg zu beschreiten:

Man zerlege die störende Funktion $s(z)$ in eine Konstante und eine dazuzufügende Funktion $t(z)$, setze also

$$(22) \quad s(z) = \frac{4}{(1 - \beta z)^2} = C + t(z),$$

wie Fig. 1 zeigt und bestimme C so, daß $\int_0^1 t \cdot v_0^2 dz$ annähernd

wenigstens verschwindet, was man ungefähr abschätzen kann. Dann erhält man statt (17) folgende Gleichung:

$$(23) \quad w'' + (\lambda - \alpha C)w - \alpha t w = 0.$$

Setzt man nunmehr $w(z) = \sum \alpha^i v_{n,i}(z)$, so ist als ungestörte Gleichung zu betrachten:

$$(24) \quad v_0'' + (\lambda_0 - \alpha C) v_0 = 0$$

mit der Lösung (vgl. oben Fall β , (11)):

$$(25) \quad v_{n,0} = c_n \cdot \sin k_n z,$$

c_n wie in (21) und $v_{n,0}^* = v_{n,0}$,

$$\lambda_{n,0} = \lambda_{n,0}^* + \alpha C = k_n^2 + \alpha C.$$

(Im folgenden sei, wenn nicht besonders bemerkt, der Index n fortgelassen).

Wendet man nun die allgemeinen Formeln auf (23) an, indem in Gleichung (1) bzw. (3) unter II zu setzen ist:

$p_0 = 1$, sämtliche p mit höherem Index gleich Null;

$q_0 = -\alpha C$, $q_1 = -t$ und sämtliche q mit höherem Index gleich Null, so erhält man nach Gl. (6) unter II für v_1 folgende Differentialgleichung:

$$(26) \quad v_1'' + k^2 v_1 = t \cdot v_0 - \epsilon_1 v_0 = f_1(z)$$

und

$$(27) \quad \epsilon_1 = c^2 \int_0^1 t(z) \cdot \sin^2 k z \cdot dz.$$

Zur Berechnung von v_1 aus der inhomogenen Differentialgleichung (26) wird zweckmäßigerweise, wie schon unter I bemerkt, die Methode der Variation der Konstanten benutzt: Sind nämlich $y_1 = \sin k z$, $y_2 = \cos k z$ die Lösungen der homogenen Differentialgleichung ($f_1 = 0$), so ist¹⁾ die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(28) \quad v_1 = y_1 d_1 + y_2 d_2,$$

$$(28a) \quad d_1(z) = \int_0^z \frac{f_1(\xi) y_2(\xi)}{y_1 y_2 - y_1' y_2'} d\xi = \frac{1}{k} \int_0^z f_1(\xi) \cdot y_2(\xi) d\xi,$$

$$(28b) \quad d_2(z) = \int_0^z \frac{f_1(\xi) \cdot y_1(\xi)}{y_2 y_1 - y_2' y_1'} d\xi = -\frac{1}{k} \int_0^z f_1(\xi) y_1(\xi) d\xi,$$

1) Vgl. L. Bieberbach, a. a. O.

wo nach der allgemeinen Ableitung für d_1 und d_2 gilt:
 $\bar{v}'_1 = y'_1 d_1 + y'_2 d_2$. Dann läßt sich mit $d_2(1) = 0$ leicht nachweisen, daß \bar{v}_1 die Randbedingungen (19a) erfüllt, so daß die Gesamtlösung ist: $v_1 = \bar{v}_1 + K_1 v_0$, wo K_1 nach Gl. (15a) II berechnet werden kann zu

$$(29) \quad K_1 = - \int_0^1 \bar{v}_1 v_0 dz = -c \int_0^1 \bar{v}_1 \sin kz dz.$$

Diese Gleichungen (28) bis (29) gelten natürlich formal für alle weiteren v_i . So erhält man noch für $i = 2$

$$(30) \quad \epsilon_2 = \int_0^1 v_1 \cdot t \cdot v_0 dz = c \int_0^1 v_1 \cdot t \cdot \sin kz \cdot dz,$$

$$(30a) \quad v''_2 + k^2 v_2 = f_2(z) = v_1(t - \epsilon_1) - \epsilon_2 v_0.$$

Nun zu den Zahlenbeispielen:

Sie wurden durchgeführt sowohl für $\beta = 0,3$, d. h. $\alpha = 0,045$ als auch für $\beta = 0,5$, d. h. $\alpha = 0,125$, um den Einfluß des Parameters erkenntlich zu machen. Die notwendigen Integrationen zur Bestimmung von d_1, d_2 wurden graphisch, bzw. wenn es sich um bestimmte Integrale handelte — wie bei ϵ_i und K_i — mit dem Planimeter durchgeführt, sämtliche Multiplikationen und Divisionen mit dem Rechenschieber. Dabei war i maximal gleich 2. Die Ergebnisse sind folgende:

$\beta = 0,3$ ($\alpha = 0,045$): Wenn $a = \frac{\pi}{2}$, so folgt für die Werte $\sqrt{\lambda_{n,0}^*}$ oder k_n ; $k_1 = 1,26a$, $k_2 = 3,11a$, $k_3 = 5,06a$, $k_4 = 7,05a$, $k_n \approx (2n - 1)a$ für $n > 4$.

Die Konstante C wurde geschätzt zu 6,6. Dann wird

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \lambda_{1,0} + \alpha \epsilon_{1,1} + \lambda_2 \epsilon_{1,2}, \\ &= (k_1^2 + 0,297) - 0,045 \cdot 0,248 - 0,002 \cdot 0,0746 \\ &= k_1^2 (1 + 0,085 - 0,003 - 0,00004) = k_1^2 (1 + 0,082), \end{aligned}$$

also $\sqrt{\lambda_1} \approx k_1 \cdot 1,04$.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\approx \lambda_{2,0} + \alpha \epsilon_{2,1} \\ &= (k_2^2 + 0,297) - 0,045 \cdot 0,74 = k_2^2 (1 + 0,0125 - 0,0014) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\lambda_2} \approx k_2 \cdot 1,006, \quad \sqrt{\lambda_3} \approx k_3.$$

Aus der Natur der Integrationen erkennt man, daß, je höher n , desto geringer der Einfluß der k_i und auch der $v_{n,i}$ wird. Die Funktionen w_n , $v_{n,0}$, $v_{n,1}$ und die endgültigen Eigenfunktionen

$$u_n = \frac{w_n}{\sqrt{F}} = \frac{\sqrt{2}}{r_0 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_n}{1-\beta z} \quad \text{sind mit} \quad \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1$$

und mit

$$w_1 \approx v_{1,0} + \alpha v_{1,1}; \quad w_2 \approx v_{2,0} + \alpha v_{2,1}; \quad w_3 \approx v_{3,0}$$

in den Figg. 2 und 3 aufgetragen.

Der Einfluß von α auf die Funktionen w_n ist sehr gering. Nur sieht man bei Betrachtung der Eigenwerte, daß der größte Teil der Änderung des Eigenwertes λ_1 gegenüber $\lambda_{1,0}^*$, nämlich 8,5 Proz. durch günstige Wahl von C erhalten wurde und der Rest ($-0,3$ Proz.!) durch den Wert $\varepsilon_{1,1}$, während $\varepsilon_{1,2}$ gar keinen praktischen Einfluß mehr hat. Auf die Kreisfrequenz, die ja proportional $\sqrt{\lambda_1}$, beträgt der Einfluß nur 4 Proz. Beim zweiten Eigenwert sind die Änderungen noch geringer, doch wurde durch Wahl von C auch die stärkste Änderung sofort erfaßt. —

$\beta = 0,5$ (d.h. $\alpha = 0,125$): Mit $a = \frac{\pi}{2}$ wird wieder:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1,456a, & k_2 &= 3,239a, & k_3 &= 5,156a, & k_4 &= 7,11a, \\ k_5 &= 9,085a, & k_6 &= 11,075a, & k_n &\approx (2n-1)a \text{ für } n > 6. \end{aligned}$$

Die Konstante C wurde geschätzt zu $C = 9$. Dann wird:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \lambda_{1,0} + \alpha \varepsilon_{1,1} + \alpha^2 \varepsilon_{1,2} \\ &= (k_1^2 + 1,125) + 0,125 \cdot 0,206 - 0,016 \cdot 0,365 \\ &= k_1^2 (1 + 0,216 + 0,0049 - 0,0011) = k_1^2 \cdot 1,22. \end{aligned}$$

$$\sqrt{\lambda_1} \approx k_1 \cdot 1,105.$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\approx \lambda_{2,0} + \alpha \varepsilon_{2,1} + \alpha^2 \varepsilon_{2,2} \\ &= (k_2^2 + 1,125) - 0,125 \cdot 0,33 + 0,016 \cdot 0,245 \\ &= k_2^2 (1 + 0,125 - 0,0016 + 0,00015) = k_2^2 \cdot 1,042. \end{aligned}$$

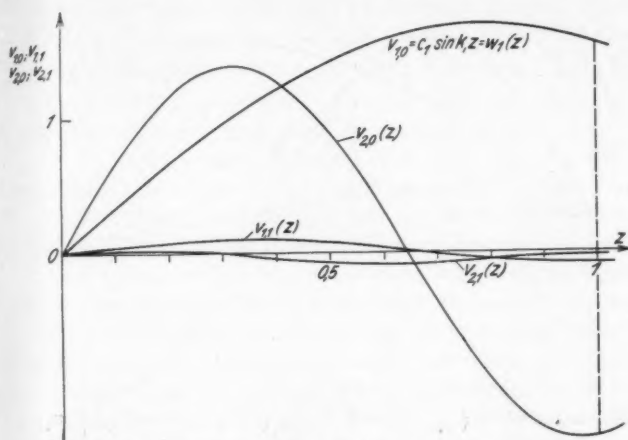
$$\sqrt{\lambda_2} \approx k_2 \cdot 1,02. \quad \sqrt{\lambda_3} \approx k_3.$$

Die Funktionen w_n , $v_{n,0}$, $v_{n,1}$, $v_{n,2}$ und die Eigenfunktionen

$$u_n = \frac{w_n}{\sqrt{F}} \quad \text{sind mit} \quad \frac{1}{r_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1$$

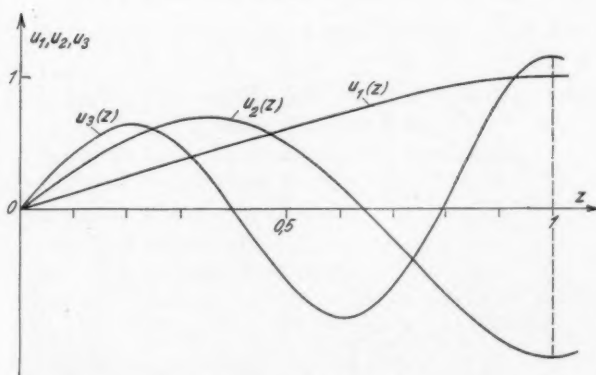
und mit

$$w_1 \approx v_{1,0} + \alpha v_{1,1} + \alpha^2 v_{1,2}; \quad w_2 \approx v_{2,0} + \alpha v_{2,1}$$



0-te Annäherung ($v_{n,0}$) und erste ($v_{n,0} + \alpha v_{n,1} = w_{n,1} \approx v_{n,0}$)
für die Funktion $w_n = u_n (1 - \beta z)$ mit $\beta = 0,3$ ($n = 1, 2$)

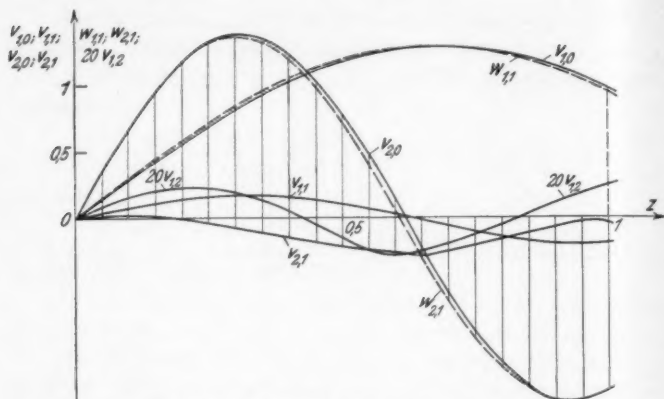
Fig. 2



Dehnung u_n des Stabes bei Längsschwingungen
 $u_n = w_n (1 - \beta z)^{-1}$ für $\beta = 0,3$ ($n = 1, 2, 3$)

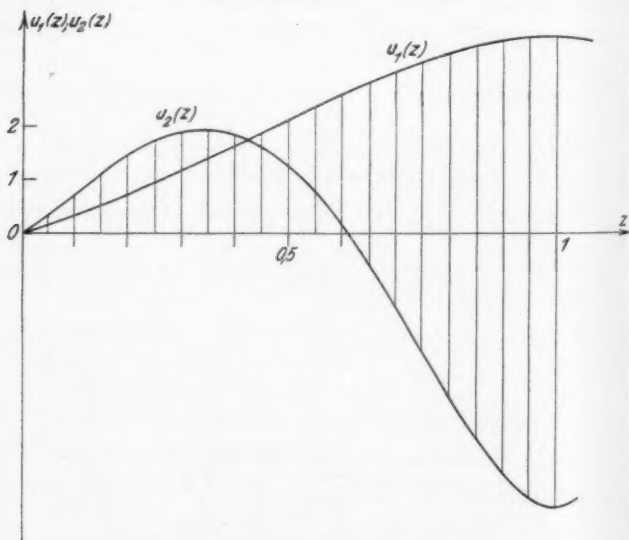
Fig. 3

in Figg. 4 und 5 aufgetragen. Der Einfluß auf die Eigenfunktionen ist naturgemäß stärker als bei $\beta = 0,3$, dennoch nicht erheblich. Nur sind die Änderungen des Eigenwertes



0-te Annäherung ($v_{n,0}$) und zweite ($v_{n,0} + \alpha v_{n,1} + \alpha^2 v_{n,2} = w_{n,2}$)
für die Funktion $w_n = u_n(1 - \beta z)$ mit $\beta = 0,5$ ($n = 1, 2$)

Fig. 4



Dehnung u_n des Stabes bei Längsschwingungen
 $u_n = u_n(1 - \beta z)^{-1}$ mit $\beta = 0,5$ ($n = 1, 2$)

Fig. 5

größer geworden. Auch hier wurde durch günstige Wahl von C die größte Änderung des Eigenwertes, nämlich 22 Proz. bei λ_1 bzw. etwa 10 Proz. bei $\sqrt{\lambda_1}$ und 4 Proz. bei λ_2 bzw. etwa 2 Proz. bei $\sqrt{\lambda_2}$ gefunden. Für die größeren Werte λ_n sind die Abweichungen gegenüber $\lambda_{n,0}^*$ noch geringer.

Da die Ausgangsdifferentialgleichung (1) für die Auslenkung y des Stabes übereinstimmt — bis auf die verschiedene Bedeutung der Materialkonstanten — mit der Differentialgleichung für die Schwingungen einer Luftsäule mit veränderlichem Querschnitt, der aber so klein sein muß im Verhältnis zur Länge, daß nur Längsschwingungen in ihr auftreten können, oder mit der Differentialgleichung für die Querschwingungen einer horizontal gespannten Saite oder eines horizontal gespannten Seiles mit veränderlichem Querschnitt, so ist hiermit ein Weg gegeben auch diese Probleme mit praktisch brauchbarer Annäherung numerisch und graphisch zu lösen.

b) Die Vertikalschwingungen eines an zwei festen Punkten gehaltenen Seils mit großem Durchhang

Es bedeutet für das betrachtete Seil (vgl. auch Fig. 6):

S kg/cm² = Spannung,

H kg/cm² = Horizontalkomponente der Spannung (konstant, vgl. Hamel, Mechanik),

V kg/cm² = Vertikalkomponente der Spannung,

F cm² = Querschnitt,

γ kg/cm³ = spezifisches Gewicht,

$2e$ cm = Spannweite,

d cm = größter Durchhang,

$y(x, t)$ cm = Auslenkung des Seiles zur Zeit t an d. Stelle x ,

$Y(x)$ cm = Auslenkung des Seiles in der Ruhelage,

$$\frac{\gamma}{H} \text{ 1/cm} = a,$$

$$e \cdot a = \delta,$$

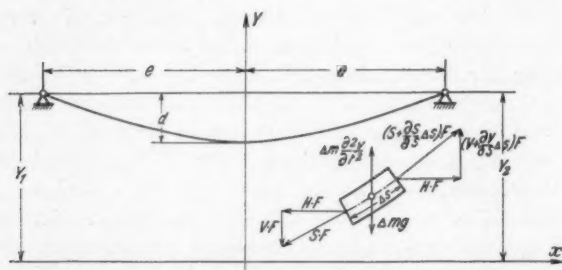
$$\frac{d}{e} = b.$$

1. Greift man ein kleines Massenteilchen Δm von der kleinen Länge Δs (s = Bogenlänge) heraus (vgl. Fig. 6), so wirken darauf folgende äußere Kräfte — da ein Seil seiner

Definition nach keine Momente aufnehmen kann — in vertikaler Richtung (von Dämpfung abgesehen):

$$-V \cdot F, \quad -m \cdot g, \quad \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \Delta s \right) \cdot F$$

und in horizontaler Richtung: $-H \cdot F, +H \cdot F$.



Durchhängendes Seil und Kräfte am bewegten Massenelement

Fig. 6

Wendet man auf dieses kleine Massenteilchen das Newtonsche Grundgesetz an, so erhält man, da $\Delta m = \Delta s \cdot \frac{F \cdot \gamma}{g}$

$$(1) \quad \frac{\Delta s \cdot F \cdot \gamma}{g} \cdot y_{tt} = -V \cdot F + V \cdot F + \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s \cdot F - \Delta s \cdot F \cdot \gamma,$$

oder

$$(2) \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\gamma + \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Nun ist

$$(3a) \quad V = H \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}},$$

also

$$(3b) \quad \frac{\partial V}{\partial s} = H \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}},$$

so daß aus (2) wird

$$(4) \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\gamma + H \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}}.$$

Faßt man nun die entstehende Bewegung auf als eine kleine Schwingung um die Gleichgewichtslage, so kann man setzen:

$$y = Y(x) + w(x, t),$$

wo Y die Gleichgewichtslage darstellt, w die kleine Auslenkung. Für Y hat man dann folgende Differentialgleichung

$$(5) \quad Y''(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Y'^2(x)}} = a.$$

Ihre Lösung ist

$$(6a) \quad Y = \frac{1}{a} \operatorname{Cof}(ax + c_1) + c_2,$$

wo c_1, c_2 Integrationskonstanten sind. Für deren Bestimmung hat man zwei Randbedingungen, während man a als gegeben betrachten kann oder aber aus dem Durchhang d bestimmt, der im folgenden statt a als bekannt vorausgesetzt sei. — Um eine einfache Form der Lösung zu erhalten, wird das Koordinatensystem so gelegt, daß man fordert:

$$Y(0) = \frac{1}{a}, \quad Y(e) = Y(-e) = d + \frac{1}{a}.$$

Dann verschwinden c_1 und c_2 , und für a hat man die Bestimmungsgleichung:

$$(7) \quad \operatorname{Cof} ea = da + 1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{Cof} \delta = \delta b + 1$$

(Diskussion dieser Gleichung vgl. unten).

Geht man nun mit (6a): $Y = \frac{1}{a} \operatorname{Cof} ax$ in Gl. (4) ein, so folgt:

$$(8) \quad \frac{a}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a + H \cdot \left[Y'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \left[1 + \left(Y' + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Da *kleine* Schwingungen vorausgesetzt sind, können höhere Potenzen von w , $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ und ihre Produkte untereinander vernachlässigt werden, und dann gilt:

$$(9) \quad \left[1 + \left(Y' + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{\operatorname{Cof} ax} \left(1 - \frac{\sin ax}{\operatorname{Cof}^2 ax} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Dies in (8) eingesetzt, ergibt unter Berücksichtigung von (5)

$$(10) \quad \frac{a}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\operatorname{Cof} ax} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Macht man nun nach Bernouilli den Ansatz:

$$(11) \quad w = u(x) \cdot \sin \omega t,$$

so erhält man wiederum eine Differentialgleichung von Sturm-Liouvilleschen Typ für $u(x)$:

$$(12) \quad \frac{d}{dx}(p \cdot u') + \frac{a \omega^2}{g} \cdot u = 0, \quad \text{wo } p = \frac{1}{\cos ax}.$$

Die Randbedingungen lauten $u(-e) = u(e) = 0$.

Betrachtet man nunmehr ein Seil von der Spannweite 2, führt also die neue Veränderliche x/e ein, so erhält man

$$(13) \quad \frac{d}{dz}(p \cdot u') + \lambda u = 0,$$

wo $p = \frac{1}{\cos \delta z}$ (da $ae = \delta$) und wo $\lambda = \frac{ae^2 \omega^2}{g}$ der Eigenwert der Differentialgleichung ist. Die Randbedingungen sind damit $u(-1) = u(1) = 0$.

2. Auf Gl. (13) könnte man sofort, da $q = 0$, die Näherungsmethode anwenden, wenn man p in der in den allgemeinen Entwicklungen angegebenen Form darstellen könnte. Entwickelt man $p(z)$ in eine Potenzreihe

$$(14) \quad p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

und setzt man, da $1 = p(z) \cdot \cos \delta z$, die Reihe für $\cos \delta z$ ein, so folgt durch Koeffizientenvergleichung

$$(15) \quad \begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = a_3 = a_5 = a_{2n-1} = 0; \\ a_2 = -\frac{1}{2} \delta^2, & a_4 = \frac{5}{24} \delta^4, & a_6 = -\frac{59}{720} \delta^6 \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Der Wert δ kann aus der transzendenten Gl. (7b) bestimmt werden. Dabei ergibt sich, daß δ für kleines Durchhangsverhältnis $b = \frac{d}{e}$ klein ist und die Horizontalspannung groß.

Z. B. ergibt ein Durchhangsverhältnis von $b = 0,02$ einen Wert $\delta = 0,04$, während für $b = 0,12$ (was für praktische Verhältnisse, Stromfernleitungen und ähnliches sehr viel ist) ein Wert $\delta = 0,24$ folgt. Im ersten Fall ist δ^2 zu vernachlässigen, während man im zweiten eventuell, wie die Rechnung nachher ergibt, δ^4 vernachlässigen kann. — Als „kleiner Parameter“

sei hier also $\alpha = \delta^2$ gewählt, und es sei nur noch die zweite Potenz von α berücksichtigt. Man hat also:

$$(16) \quad p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2$$

wo

$$p_0 = 1, \quad p_1 = -\frac{1}{2} z^2, \quad p_2 = +\frac{5}{24} z^4.$$

Um den Einfluß des Parameters zu erkennen, soll hier von graphischen Methoden abgesehen werden.

Man findet bei Anwendung der Näherungsmethode als Lösung des ungestörten Problems

$$(17) \quad v''_{n,0} + [\lambda_{n,0} v_{n,0} = 0$$

das normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen

$$(18) \quad v_{n,0} = A_n \sin k_n z + B_n \cos k_n z$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{n,0} = k_n^2 = \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2, n = 1, 2, 3$ usw., wo

$$A_n = 1, \quad B_n = 0, \quad \text{wenn } n = 2m, \quad m = 1, 2, 3 \text{ usw.},$$

$$A_n = 0, \quad B_n = 1, \quad \text{wenn } n = 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3 \text{ usw.}$$

Der Index n sei nicht weiter mitgeschleppt, nur zu gegebener Zeit angefügt. — Die Differentialgleichung für v_1 lautet:

$$(19) \quad v_1'' + k^2 v_1 = -\frac{d}{dz} (p_1 v_0') - \varepsilon_1 v_0 = f_1(z),$$

und es wird

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dz} (p_1 v_0') v_0 dz \\ &= -p_1 v_0' v_0 \Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} p_1 v_0'^2 dz = \int_{-1}^{+1} p_1 v_0'^2 dz. \end{aligned} \right.$$

Die Auswertung von (20) ergibt

$$(21) \quad \varepsilon_1 = -\frac{k^2}{6} - \frac{1}{4} \quad \text{für jedes } n.$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten oder nach der Einsetzungsmethode erhält man:

$$(22) \quad v_1 = \frac{k z^3}{12} \cos k z + \frac{z^3}{8} \sin k z - \frac{k z}{12} \cos k z - \frac{1}{24} \sin k z,$$

wo

$$v_1 = \bar{v}_1 + K_1 v_0 = \bar{v}_1 + \frac{1}{4} v_0 \quad \text{gültig für } k = m\pi,$$

$$(23) \quad v_1 = -\frac{kz^3}{12} \sin kz + \frac{z^3}{8} \cos kz + \frac{kz}{12} \sin kz - \frac{1}{24} \cos kz,$$

wo

$$v_1 = \bar{v}_1 + K_1 v_0 = \bar{v}_1 - \frac{1}{24} v_0 \quad \text{gültig für } k = \frac{2m-1}{2} \pi.$$

Für die zweite Eigenwertänderung erhält man nach den allgemeinen Formeln:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_2 &= - \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} (p_1 v_1') v_0 dz - \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} (p_2 v_0') v_0 dz \\ &= - \int_{-1}^{+1} (p_1 v_1' v_0' + p_2 v_0'^2) dz. \end{aligned} \right.$$

Das ergibt mit $p_2 = \frac{5}{24} z^2$

$$(25) \quad \varepsilon_2 = -\frac{k^2}{60} - \frac{7}{48} + \frac{7}{32 k^2}, \quad k = m\pi,$$

$$(26) \quad \varepsilon_2 = +\frac{k^2}{90} - \frac{7}{48} + \frac{9}{32 k^2}, \quad k = \frac{2m-1}{2} \pi.$$

Die Funktion v_2 wurde für $h = m\pi$ mit der Einsetzungsmethode berechnet; doch ergeben sich etwas langwierige Ausdrücke, die hier nicht angegeben werden sollen, da das Zahlenbeispiel zeigt, daß v_2 einen unbedeutenden Beitrag liefert.

3. Für einen schon beträchtlichen Parameterwert α , nämlich für $b = 0,25$ und $\delta = 0,49$, also $\alpha = 0,24$ ergibt sich, wenn man noch $\frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_{n,0}}}{\sqrt{\lambda_{n,0}}} = D_n$ setzt, um den Einfluß auf

die Kreisfrequenz ω der Schwingung erkenntlich zu machen:

$$D_1 = -0,0145, \quad D_2 = -0,024, \quad D_3 = -0,018, \quad D_4 = -0,021, \\ D_5 = -0,017, \quad D_6 = -0,021, \quad D_7 = -0,017, \quad D_8 = -0,020.$$

$$D_{2m} \approx -0,02 \text{ für } m \geq 4; \quad D_{2m-1} \approx -0,017 \text{ für } m \geq 4.$$

Erklärung zu Figg. 7, 8, 9:

Formen der Transversalschwingungen
eines horizontal gespannten Seiles $u_n \approx v_{n,0} + \alpha v_{n,1}$:

Fig. 7: Grundschwingung und zweite Oberschwingung ($n = 1$ und 3)

Fig. 8: Erste und dritte Oberschwingung ($n = 2$ und 4)

Fig. 9: Vierte und fünfte Oberschwingung ($n = 5$ und 6)

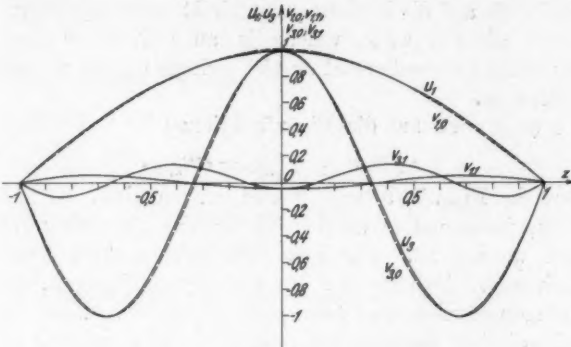


Fig. 7

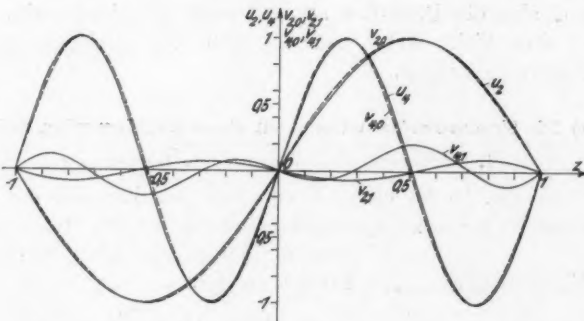


Fig. 8

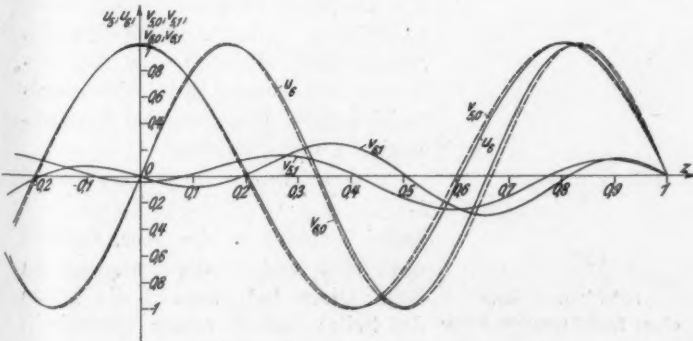


Fig. 9

Der Einfluß auf die Kreisfrequenz bleibt unter 2,5 Proz., aber er senkt die Frequenz, welche ja an sich schon gegenüber einem straff gespannten Seil durch Verringerung der Spannung H gesunken ist.

Der Einfluß auf die Eigenfunktionen

$$u_n \approx u_{n,1} = v_{n,0} + \alpha v_{n,1},$$

welche in Figg. 7, 8 und 9 aufgetragen sind, ist nicht erheblich, insbesondere wo der Einfluß der Dämpfung vernachlässigt worden ist. Für hohe Schwingungszahlen haben die Berechnungen insbesondere für die Eigenfunktionen, also die Schwingungsformen nur dann noch einen Sinn, wenn der Abstand zwischen zwei Knoten tatsächlich noch so groß ist, daß man die Biegeungssteifigkeit des Seils als sehr gering ansehen kann, also die Definition als Seil noch zurecht besteht. Sobald dies nicht mehr möglich ist, gilt eine andere Differentialgleichung.

c) Die Transversalschwingungen eines freihängenden Seiles

1. Differentialgleichung der Bewegung

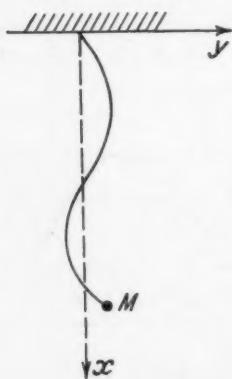
In Fig. 10 ist etwas übertrieben der Zustand des freihängenden Seiles zu irgendeiner Zeit dargestellt. Die Schwingungen sollen als klein angesehen werden, so daß

$$\frac{dx}{ds} \approx 1, \quad \frac{dy}{ds} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Die am Ende hängende Masse M sei punktförmig gedacht. Nach Hamel, „Elementare Mechanik“, § 58, Abschnitt 351 lautet die Differentialgleichung der Bewegung bei Vernachlässigung der Dämpfung:

$$(1) \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

Dabei bedeutet γ das spez. Gewicht des Seiles und S die Spannung im Seil. Diese hat, wenn l die Länge des Seiles und F seinen Querschnitt bezeichnet, die Größe



Schwingungsform
eines freihängenden Seiles

Fig. 10

$$(2) \quad S = -\gamma x + \frac{M \cdot g + F \cdot l \cdot \gamma}{F} = -\gamma x + S_0;$$

die Randbedingungen lauten:

$$(3) \quad \begin{cases} y = 0 & \text{für } x = 0, \\ M \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + M \cdot g \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & \text{für } x = l. \end{cases}$$

Macht man in (1) den Ansatz

$$(4) \quad y = u(x) \cdot \sin \omega t,$$

wo ω die Kreisfrequenz der Schwingung, so wird aus (1):

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(S \cdot \frac{du}{dx} \right) + \frac{\gamma}{g} \omega^2 \cdot u = 0.$$

Führt man die neue Veränderliche $z = \frac{x}{l}$ ein, so kann für S geschrieben werden:

$$(6) \quad S = -\gamma l \cdot z + S_0 = S_0 \cdot \left(1 - \frac{\gamma \cdot l \cdot F}{Mg + F\gamma l} \cdot z \right).$$

Nun ist $\gamma \cdot l \cdot F = G_2$, dem Gewicht des Seiles und $M \cdot g = G_1$, dem Gewicht der Masse M , also

$$\frac{\gamma \cdot l}{S_0} = \frac{1}{\frac{G_1}{G_2} + 1} = \alpha$$

und

$$(7) \quad S = S_0 (1 - \alpha z).$$

Hiermit wird dann aus (5)

$$(8) \quad \frac{d}{dz} [u' \cdot (1 - \alpha z)] + \lambda u = 0,$$

wenn

$$(9) \quad \lambda = \frac{\omega^2 \cdot \alpha \cdot l}{g} + m^2.$$

Mit Hilfe der Transformation

$$(10) \quad \xi = \sqrt{1 - \alpha z} \cdot \frac{2m}{\alpha}$$

kann man (8) überführen in die Besselsche Differentialgleichung 0-ter Ordnung:

$$(11) \quad u''(\xi) + \frac{1}{\xi} u'(\xi) + u(\xi) = 0.$$

Ihre Lösung setzt sich zusammen aus den Besselschen Funktionen 0-ter Ordnung erster und zweiter Art:

$$(12) \quad \begin{cases} u = c_1 \cdot J_0(\xi) + c_2 \cdot Y_0(\xi) \\ \quad = c_1 \cdot J_0\left(\frac{2m}{\alpha} \sqrt{1-\alpha z}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{2m}{\alpha} \sqrt{1-\alpha z}\right). \end{cases}$$

Die Größen m und c_1, c_2 ergeben sich aus den Randbedingungen, welche auf folgende transzendente Gleichung zur Bestimmung von m führen:

$$(13) \quad \frac{J_0(\delta)}{Y_0(\delta)} = \frac{\alpha \cdot J_0'(\delta \sqrt{1-\alpha}) + m \sqrt{1-\alpha} \cdot J_0(\delta \sqrt{1-\alpha})}{\alpha \cdot Y_0'(\delta \sqrt{1-\alpha}) + m \sqrt{1-\alpha} \cdot Y_0(\delta \sqrt{1-\alpha})}, \text{ wo } \delta = \frac{2m}{\alpha}.$$

Es seien zunächst zwei Sonderfälle unterschieden:

α) Am Endpunkt des Seiles sei keine Masse vorhanden; dann wird $M = 0$ und $\alpha = 1$. Die zweite Randbedingung ist in der Form auszusprechen, daß u endlich bleibt für $z = 1$, d. h. aber, daß $c_2 = 0$ wird. Infolgedessen wird die Lösung

$$(14) \quad u = c \cdot J_0 \cdot (2m \cdot \sqrt{1-z}),$$

und für $m = \sqrt{\lambda}$ hat man die transzendente Gleichung

$$(15) \quad J_0(2m) = 0,$$

die unendlich viele Eigenwerte liefert.

β) Wenn die Masse M im Verhältnis zur Eigenmasse des Seiles sehr groß ist und α infolgedessen sehr klein, so kann man in Gl. (8) das Glied αz vernachlässigen (vgl. Hamel, Elementare Mechanik). Dann erhält man also:

$$(16) \quad u''(z) + \lambda \cdot u(z) = 0,$$

und mit $m^2 = \lambda$

$$(17) \quad u = c_1 \cdot \sin mz + c_2 \cdot \cos mz.$$

Die Randbedingungen ergeben $c_2 = 0$, und für m die transzendente Gleichung

$$(18) \quad \operatorname{tg} m = \frac{\alpha}{m},$$

die wiederum unendlich viele Eigenwerte liefert.

2. Anwendung des Näherungsverfahrens

Wie man sieht, sind nur in diesen beiden Sonderfällen die Eigenwerte und Eigenfunktionen relativ einfach zu finden, während im allgemeinen Fall die kompliziertere Bestimmungs-

gleichung (13) auftritt und die Eigenfunktionen aus (12). Nun versagen bereits für ein Massenverhältnis von 1:2, d. h. für $\alpha = 1/3$ die Tabellen zur Bestimmung des zweiten Eigenwertes, und es erhebt sich die Frage, ob man nicht durch Anwendung des Näherungsverfahrens gut zum Ziel kommt, wenn man den zweiten Sonderfall als ungestörtes Problem wählt. Selbst wenn das Verfahren hier nicht gut konvergieren sollte, so dürfte zum mindesten interessant sein, wie hier das Annäherungsverfahren anzusetzen ist. Denn gegenüber den bisherigen Problemen und den allgemeinen Ableitungen im Anfang tritt hier als neues Moment auf, daß die Eigenfunktionen u_n und u_m für die Eigenwerte λ_n und λ_m und nicht mehr orthogonal sind, d. h. daß

$$(19) \quad \int_0^1 u_n \cdot u_m \cdot dz \neq 0.$$

Man spricht in diesem Fall von „belasteter Orthogonalität“.

Gibt man der zweiten Randbedingung nach (3) die allgemeine Form

$$(19a) \quad c \cdot u'(1) + \lambda u(1) = 0$$

hier speziell ist $c = -\alpha$, so erhält man für das Integral (19) folgenden Wert:

$$(20) \quad \int_0^1 u_n \cdot u_m \cdot dz = \frac{1-\alpha}{c} \cdot u_n(1) \cdot u_m(1); \quad n \neq m.$$

Wenn also (17) als ungestörtes Problem aufgefaßt wird, d. h.

$$(21) \quad v_0'' + \lambda_0 v_0 = 0,$$

wo

$$v_0 = C \cdot \sin m z, \quad m^2 = \lambda_0$$

und

$$\operatorname{tg} m = \frac{\alpha}{m}$$

die Bestimmungsgleichung für m ist, gemäß der zweiten Randbedingung

$$(22) \quad c \cdot v_0'(1) + \lambda_0 v_0(1) = 0,$$

wo weiter

$$(23) \quad \int_0^1 v_{n,0} \cdot v_{m,0} \cdot dz = \frac{1}{c} \cdot v_{n,0}(1) \cdot v_{m,0}(1), \quad n \neq m$$

und wo schließlich die Normierungskonstante C daraus bestimmt wird, daß die $v_{n,0}$ „belastet“ normiert sind, d. h.

$$(24) \quad \int_0^1 v_0^2 \cdot dz - \frac{v_0^2(1)}{c} = 1,$$

dann sei für das gestörte Problem

$$(25) \quad u'' + \lambda \cdot u - \alpha \frac{d}{dz}(z \cdot u') = 0,$$

wie beim unbelasteten Problem der Ansatz gemacht:

$$(26) \quad \lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1} \alpha^i \varepsilon_i$$

und

$$(27) \quad u(z) = v_0(z) + \sum_{i=1} \alpha^i v_i(z).$$

Dabei muß u natürlich die Randbedingungen erfüllen.

Man geht wie unter I. mit diesem Ansatz in Gl. (25) ein und erhält durch Vergleich entsprechender Potenzen von α die Differentialgleichungen:

$$(28) \quad v_i'' + \lambda_0 v_i = - \sum_{k=1}^{k=i} (\varepsilon_k \cdot v_{i-k}) + \frac{d}{dz}(z \cdot v_{i-1}') = f_i(z).$$

Während beim unbelasteten Problem v_i und v_0 orthogonal waren, derart, daß $\int_0^1 v_i v_0 dz$ verschwindet, muß man hier annehmen, daß $v_i v_0$ „belastet orthogonal“ sind, d. h. daß

$$(29) \quad \int_0^1 v_i v_0 dz = \frac{1}{c} \cdot v_i(1) v_0(1), \quad i \neq 0.$$

Dann erhält man für die Eigenwertänderungen folgende Rekursionsformel

$$(30) \quad \varepsilon_i = \int_0^1 \frac{d}{dz}(z \cdot v_{i-1}') v_0 dz = v_{i-1}'(1) \cdot v_0(1) - \int_0^1 z v_{i-1}' v_0 dz.$$

Ein weiterer Unterschied gegenüber einem unbelasteten Problem liegt in den Randbedingungen für die v_i : Während beim unbelasteten Problem die v_i dieselbe Randbedingung wie v_0 oder

auch u erfüllten, haben hier die v_i ganz bestimmte, vorgeschriebene Randbedingungen zu erfüllen. Wohl ist $v_i(0) = v_0(0) = u(0)$, doch folgen durch Einsetzen der Reihen für u und λ in die zweite Randbedingung (19a) und durch Vergleich entsprechender Potenzen von α die Randbedingungen für die v_i im Punkte 1:

$$(31) \quad c \cdot v_i' + \lambda_0 v_i + \sum_{k=1}^{k=i} \epsilon_k \cdot v_{i-k} = 0 \quad \text{für } z = 1.$$

Sind $\bar{v}_i(z)$ die Lösungen der Gl. (28) und erfüllen diese die Randbedingungen (31), so kann die allgemeine Lösung geschrieben werden:

$$(32) \quad v_i(z) = \bar{v}_i(z) + K_i v_0(z).$$

Die Konstante K_i muß so bestimmt werden, daß (29) erfüllt wird. Es wird

$$(33) \quad K_i = \frac{1}{c} \bar{v}_i(1) \cdot c_0(1) - \int_0^1 v_0 \bar{v}_1 dz.$$

Die Lösung der Differentialgleichung (28) kann geschehen mit Hilfe der bereits in den anderen Beispielen angewandten Methoden der Variation der Konstanten. Wenn $y_1 (= v_0)$ und $y_2 (= C \cdot \cos mz)$ die partikulären Integrale der homogenen Gleichung sind, wird

$$(34) \quad \bar{v}_i(z) = y_1 \cdot d_1 + y_2 d_2$$

(Index i bei d_1, d_2 fortgelassen), wo

$$(35) \quad d_1 = \frac{1}{D} \int_0^z f_i(\xi) y_2(\xi) d\xi, \quad d_2 = -\frac{1}{D} \int_0^z f_i(\xi) y_1(\xi) d\xi$$

und

$$(36) \quad D = y_1' y_2 - y_2' y_1 = \text{const} = -\frac{1}{c} y_1(1) [\lambda_0 y_2(1) + c y_2'(1)].$$

Die d_1, d_2 genügen noch der Beziehung, daß

$$(37) \quad d_1' \cdot y_1 + d_2' \cdot y_2 = 0$$

für jedes z des Bereiches, so daß

$$(38) \quad \bar{v}_i(1) = d_1(1) \cdot y_1'(1) + d_2(1) y_2'(1).$$

Man kann leicht nachweisen, daß $v_i(z)$ nach Gl. (34) die für den Index i vorgeschriebene Randbedingungen nach (31) erfüllt, so daß K_i ohne weiteres bestimmt werden kann.

Nunmehr zur Einzelberechnung: Aus der transzendenten Gl. (18) kann man die Eigenwerte $\lambda_{n,0}$ bzw. die Werte m_n berechnen; sie ergibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{(n-1)\pi} = 1$, und für die belastet normierte Eigenfunktion v_0 erhält man

$$(39) \quad v_0 = C_n \sin m_n z = \sqrt{\frac{2}{1 - \sin^2 m_n}} \sin m_n z \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \sqrt{2}).$$

Die Rekursionsformel (30) ergibt für $i = 1$

$$(40) \quad \varepsilon_1 = -m^2 \int_0^1 z \cdot v_0^2 dz + 0,5 v_0^2(1) = E_1 m^2,$$

wo

$$(41) \quad E_1 = \frac{\frac{\sin^2 m}{2m^2} - \frac{1}{2} - c - c \frac{\cos^2 m}{m^2}}{1 - \frac{1}{c} \sin^2 m} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} E_1 = -0,5).$$

Die Differentialgleichung für v_1

$$(42) \quad v_1'' + \lambda_0 v_1 = -\varepsilon_1 v_0 + \frac{d}{dz}(z \cdot v_0')$$

liefert mit der Orthogonalisierungskonstanten K_1 , die bei den nicht mehr ganz einfachen Randbedingungen einen längeren Ausdruck ergibt, nämlich

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{K_1}{C^2} = K_1' = \sin^2 m \left[\frac{E_1}{c} + 3E_1 + \frac{3}{8c} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8m} \right. \\ \left. - \frac{1}{8m \cdot c} + \frac{c}{4m} \right] - \frac{7E_1}{8} - \frac{3}{16} - \frac{c}{4m} + \frac{m}{24}, \end{aligned} \right.$$

für v_1 schließlich den Wert

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 = C[(C \cdot K_1' - 0,5 E_1 + 0,25 z) \sin m z \\ + (0,5 m E_1 + 0,25 m z^2) \cos m z]. \end{aligned} \right.$$

Versucht man auch noch die zweite Eigenwertänderung zu berechnen

$$(45) \quad \varepsilon_2 = \int_0^1 \frac{d}{dz}(z \cdot v_1') v_0 dz = v_1'(1) \cdot v_0(1) - \int_0^1 z v_1' \cdot v_0' dz$$

und setzt $\varepsilon_2 = E_2 \cdot m^2$, so folgt

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2 &= C^2 [], \text{ wo die Klammer folgenden Ausdruck bedeutet:} \\ [] &= -\frac{m}{16} + \frac{C \cdot K_1'}{2} - \frac{3}{16} - \frac{E_1}{8} - \frac{1}{m} \left(\frac{c}{8} - \frac{3c^3}{8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{m^3} \left(\frac{3c}{8} + \frac{E_1 c}{8} + \frac{E_1 c^3}{8} + C \cdot K_1' c - \frac{C \cdot K_1'}{2} + \frac{E_1 c^3}{4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{m^3} \left(\frac{15}{16} c^5 - \frac{c^3}{8} \right) \\ &\quad - \sin^2 m \left\{ \frac{c^3}{8m} + \frac{1}{m^3} \left(C \cdot c K_1' - \frac{1}{16} - \frac{3c}{8} + \frac{3E_1 c}{8} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{C K_1'}{2} + \frac{E_1 c^3}{4} \right) + \frac{1}{m^3} \left(\frac{c^3}{8} - c^4 + \frac{c^2}{16} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

(Im Ausdruck für K_1 und E_2 könnten je nach Größe von m einige Summanden vernachlässigt werden, so daß die praktische Durchrechnung verhältnismäßig einfach wird.

Man hätte selbstverständlich all die Integrationen auch graphisch durchführen können, was den Vorteil hat, daß man nicht mit so langwierigen Ausdrücken zu tun hat, andererseits aber ist der formelmäßige Ausdruck geeigneter den Einfluß von α bzw. c erkennen zu lassen.

3. Durchrechnung eines Zahlenbeispiels

Als Massenverhältnis sei gewählt $1/2$, d. h. die Masse am Endpunkt sei doppelt so groß als die Seilmasse. Dann wird der Parameter α gleich $1/3$.

Die transzendente Bestimmungsgleichung für m (vgl. GL 18) wurde mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens gelöst, das sich gerade hier günstig anwenden läßt. Man erhält:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,5473; & m_2 &= \pi + 0,1012 = 3,2428; \\ m_3 &= 2\pi + 0,05255 = 6,3357; & m_4 &= 3\pi + 0,03537 = 9,5601; \\ m_5 &= 4\pi + 0,0265 = 12,5529; & m_6 &= 5\pi + 0,0212 = 15,7291; \\ m_7 &= 6\pi + 0,0177 = 18,867. \end{aligned}$$

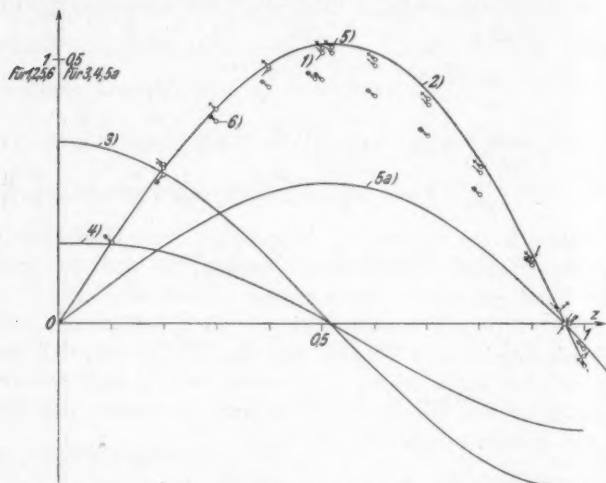
Zunächst sei die erste Oberschwingung betrachtet, d. h. $n = 2$. Man erhält:

$$\begin{aligned} C_2 &= 1,392; & K_{2,1}' &= 0,294; \\ E_{2,1} &= -0,4687; & E_{2,2} &= -0,265; \end{aligned}$$

also:

$$\lambda_{2,2} = m_2^2 \left[1 - \frac{0,4687}{3} - \frac{0,265}{9} \right] = m_2^2 \cdot 0,8163 = 8,59.$$

Die erste Annäherung für die Eigenfunktion u_2 , also $u_{2,1} = v_{2,0} + \alpha v_{2,1}$ ist in Fig. 11 aufgetragen (Kurve 1, Kennzeichen \rightarrow) und zwar noch multipliziert mit einem konstanten Faktor M_2 derart, daß $M_2 \cdot u_{2,1}'(0) = 3$ wird.



Form u_2 des freihängenden Seiles bei der ersten Oberschwingung (nebst Kontrollen)

Kurve 1: $u_{2,1} = v_{2,0} + \alpha v_{2,1}$ (rechnerisch)

„ 2: u_2 graphisch mit $\lambda_2 = 8,67$

„ 3: $R_1(z) = \int_0^z u_2 dz + \frac{3}{\lambda_2}$ (u_2 aus Kurve 2)

„ 4: $u_2'(z) = \frac{\lambda_2 R_1}{1 - \alpha z}$

„ 5 u. 5a: $\int_0^z u_2'(z) dz = u_{(2)}$

„ 6: $\text{const } v_{2,0}$ (ungestörtes Problem, 0-te Annäherung)

Fig. 11

Für die zweite Oberschwingung, d. h. $n = 3$, erhält man

$$C_3 = 1,412;$$

$$K_1' = 0,5242;$$

$$E_{3,1} = -0,496;$$

$$E_{3,2} = -0,4261,$$

also

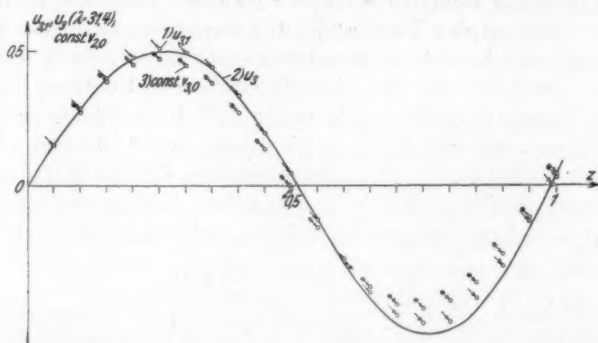
$$\lambda_{3,2} = m_2^2 \cdot (1 - 0,1653 - 0,04746) = m_2^2 \cdot 0,7873 \approx 31,6.$$

Die erste Annäherung für u_3 , also $u_{3,1} = v_{3,0} + \alpha v_{3,1}$ ist in Fig. 12 aufgetragen.

Für die Grundschiwingung selbst, d. h. $n = 1$ findet man

$$C_1 = 1,299; \quad \varepsilon_{1,1} = 0,193; \\ \lambda_{1,1} = m_1^2 + 0,0643 = 0,3639 \approx 0,603^2.$$

Berechnet man nun λ_1 aus der transzendenten Gl. (13), so findet man $\sqrt{\lambda_1} = 0,595$. Da die Kreisfrequenz der Schwingung proportional der Quadratwurzel aus dem Eigenwert ist, hat



Form u_3 des freihängenden Seiles bei der zweiten Oberschwingung

Kurve 1: $u_{3,1} = v_{3,0} + \alpha v_{3,1}$ (rechnerisch)

„ 2: u_3 graphisch mit $\lambda_3 = 31,4$

„ 3: $\text{const } v_{3,0}$ (ungestörtes Problem, 0-te Annäherung)

Fig. 12

man also von dem Wert $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 0,603$, der ersten Annäherung 1,3 Proz. abziehen, um den genauen Wert der Kreisfrequenz zu erhalten, während man zu dem Wert $\sqrt{\lambda_{1,0}} = m_1$, also der nullten Annäherung noch 7,68 Proz. hinzuzuzählen hat!

4. Vergleich der Ergebnisse mit den durch das Blaeßsche Integrationsverfahren gefundenen Werten

Da für die höheren Eigenwerte eine exakte Kontrolle durch Berechnung von $G(\lambda)$ mangels Tabellen der Besselschen Funktionen für höhere Eigenwerte nicht möglich ist, sei ein anderes, allerdings graphisches Verfahren herangezogen.

Prof. Dr.-Ing. Blaeß hat ein besonders für technische Zwecke geeignetes graphisches Verfahren zur Integration von gewöhn-

lichen Differentialgleichungen gefunden (vgl. Ztschr. für technische Physik Bd. 9, 1928, Nr. 1)¹⁾, das für Anfangswert- und Randwertprobleme zu guten Ergebnissen geführt hat. Hier sei es herangezogen, das Eigenwertproblem zu lösen.

Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung (8), die zweckmäßig in der Form geschrieben wird:

$$(47) \quad u'' = \frac{\alpha}{1-\alpha z} \cdot u' - \frac{\lambda}{1-\alpha z} \cdot u, \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

Die gesuchte Funktion u kann entwickelt werden von $z = 0$ aus. Dort ist der Wert $u(0) = 0$ bekannt; der Wert der Ableitung $u'(0)$ kann beliebig angenommen werden, denn dieser Wert bestimmt nur die absolute Größe der Funktion, nicht ihre Form, er äußert sich nur als Maßstabsfaktor. $u''(0)$, $u'''(0)$ usw. wären bekannt, wenn der Eigenwert bekannt wäre. Dieser müßte nun so angenommen werden, daß die ausgeführte Integration eine solche Kurve $u(z)$ liefert, daß im Punkte $z = 1$ die zweite Randbedingung erfüllt ist, daß also

$$D(\lambda) = -\alpha u'(1) + \lambda u(1)$$

verschwindet. Man wird also für λ einen bestimmten Wert annehmen, mit diesem Gl. (47) graphisch integrieren und den Wert $D(\lambda)$ im Endpunkt $z = 1$ ablesen, da ja $u(1)$ und angenehmer Weise auch $u'(1)$ nach dem Blaßschen Verfahren zu finden sind. Ist $D(\lambda)$ nicht gleich Null, so versucht man mit einem anderen Wert λ zu integrieren, bestimmt wiederum $D(\lambda)$ usw. Man kann dann $D(\lambda)$ als Funktion von λ auftragen und so seine Nullstelle finden. Mit dem Wert λ , der $D(\lambda) = 0$ entspricht, kann man nochmals integrieren, um somit eine recht genaue Lösung zu finden.

Nun sieht man im Verlauf der einzelnen Schritte des graphischen Verfahrens, in welcher Richtung der ursprünglich angenommene Wert λ geändert werden muß, und kommt verhältnismäßig schnell zum Ziel. Man kann sich gewissermaßen auf die richtige Eigenfunktion und den richtigen Eigenwert einpendeln.

Ganz wahllos wird man natürlich λ nicht annehmen, sondern man kann z. B. ausgehen von dem Wert $\lambda_{n,0} = m_n^2$, der die

1) Vgl. auch Verf. Notiz in der Ztschr. f. techn. Physik. Bd. 11. 1930. Nr. 7.

nullte Annäherung darstellen würde, oder auch von dem Wert $\lambda_{2,2}$, wie er bereits oben berechnet ist.

So erhielt man durch graphische Integration mit dem Intervall $\Delta z = \frac{1}{5}$ und unter Berücksichtigung von $\frac{\Delta z^3}{3!} u'''$ für die Grundschiwingung mit $\lambda = 0,3$ und $\lambda = 0,4$ für D die Werte $-0,035$ bzw. $+0,039$. Die Nullstelle für D erhält man annähernd für $\lambda_1 = 0,348$, also $\sqrt{\lambda_1} = 0,59$. — Die beiden Werte $\lambda = 0,4$ und $\lambda = 0,3$ waren übrigens auf Grund der Tatsache aufgestellt, daß roh angenähert die Grundschiwingung des Seiles übereinstimmt mit der eines mathematischen Pendels gleicher Länge ($\lambda_1 \approx \alpha$).

Vergleicht man den hier graphisch gefundenen Wert $\sqrt{\lambda_1} = 0,59$ mit dem exakten $\sqrt{\lambda_1} = 0,595$ (vgl. oben), so ist die Abweichung kleiner als 1 Proz. Bezeichnend ist übrigens, daß man diese für praktische Bedürfnisse hinreichende Genauigkeit mit dem Blaeßschen Verfahren schneller erreicht als durch die exakte Lösung der Gleichung $G(\lambda) = 0$ und auch gleichzeitig die Schwingungsform in praktisch genügender Genauigkeit erhält, z. B. indem man zwischen die Kurven $\lambda = 0,4$ und $\lambda = 0,3$ die richtige einzeichnet.

Um einen Überblick über den Gang des Blaeßschen Verfahrens bei Eigenwertproblemen überhaupt zu bekommen, wurde bei Bestimmung der zweiten Eigenfunktion und des zweiten Eigenwertes als Ausgangspunkt ein λ genommen, das $\lambda_{2,0}$ sehr benachbart ist, und dann für eine Reihe von Werten λ die Differentialgleichung graphisch integriert und jedesmal $D(\lambda)$ bestimmt. (Bei sämtlichen Kurven wurde übrigens für $u'(0)$ der gleiche Wert, nämlich $u'(0) = 3$ gewählt, um eine gute Vergleichsmöglichkeit zu haben.) Als Intervall wurde gewählt

$\Delta z = \frac{1}{10}$. Dann findet man, daß die Nullstelle von $D(\lambda)$ zwischen $\lambda = 8,7$ und $\lambda = 8,6$ liegt und den Wert $\lambda_2 = 8,67$ liefert. Dieser Wert wird also — immer natürlich innerhalb der Genauigkeit des Verfahrens — der richtige sein. Die richtige Eigenfunktion kann man zwischen die Kurven für $\lambda = 8,6$ und $\lambda = 8,7$ einskizzieren, eventuell noch unter Berücksichtigung der Entfernung e des Knotenpunktes vom Ende, indem man auch e als Funktion von λ aufträgt und seinen

angenäherten Wert für $\lambda = 8,67$ abliest. Diese so erhaltene Eigenfunktion ist in Fig. 11 als Kurve 2 eingetragen.

Nun zur Kontrolle des Ergebnisses: Wenn u_2 in Kurve 2 von Fig. 11 mit $\lambda = 8,67$ die richtige Eigenfunktion ist, dann muß sie folgende Gleichung erfüllen:

$$(48) \quad \frac{d}{dz} [(1 - \alpha z) u_2'] = -\lambda_2 u_2$$

oder durch Integration

$$(49) \quad \frac{(1 - \alpha z) u_2'}{\lambda_2} = - \int u_2(z) dz + \frac{c'}{\lambda_2} = R_1(z).$$

Diese Kurve $R_1(z)$ kann also durch graphische Integration von u_2 gefunden werden. Die Konstante c' wird daraus bestimmt, daß $u'(0) = 3$, also $c' = 3$ wird.

In Fig. 11 ist R_1 unter Kurve 3 gezeichnet worden. Hieraus kann durch Umrechnung $u_2'(z)$ gefunden werden (vgl. Kurve 4). Integriert man die Kurve wiederum graphisch mit der Anfangsbedingung $u_2(0) = 0$, so erhält man Kurve 5a (in halbem Maßstab durch entsprechende Wahl des Poles). Die doppelten Werte — also in demselben Maßstab aufgetragen als die Ausgangskurve — sind durch Nullkreise mit dem Zeichen \rightarrow angedeutet (Kurve 5).

In derselben Figur stellen außerdem die mit \rightarrow bezeichneten Punkte der Kurve 6 die Funktion $v_{2,0}$ dar, auch wie Kurve 1 multipliziert mit einem konstanten Faktor $H_{2,0}$ derart, daß $H_{2,0} \cdot v_{2,0}'(0) = 3$ wird.

Das Ergebnis ist folgendes: Die Kurven 1, 2 und 5 stimmen in ihren größten Werten nicht sehr genau überein. Die Kurve 5 stellt gewissermaßen einen Mittelwert zwischen 1 und 2 dar. Doch sind die Knotenentfernungen für die Kurve 1 und 5 die gleichen, der Knoten liegt danach etwa bei $z_1 = 0,9625$. Nun interessiert gerade bei der Schwingungsform der Knoten, der also praktisch recht genau bestimmt ist. Auch der Eigenwert λ kann nur noch einen geringen Fehler haben, denn für die Kurve 5 wird $D(\lambda) = 0,056$, also auch praktisch sehr klein. Die Kurve 6, die ja $v_{2,0}$ im wesentlichen darstellt, weicht in ihren Größt-werten ganz erheblich von 1, 2 und 5 ab und liefert auch einen Knotenwert $z_1 = 0,97$, der weit weniger genau mit den anderen Werten übereinstimmt.

Nun zum Vergleich der Eigenwerte: Das graphische Verfahren lieferte $\lambda_2 = 8,67$ (a), das angenäherte rechnerische Verfahren $\lambda_{2,2} = 8,59$ (b) bzw. $\lambda_{2,1} = 8,87$ (c), die nullte Annäherung $\lambda_{2,0} = 10,512$ (d). Da nun letzten Endes nicht die Eigenwerte, sondern die Kreisfrequenzen der Schwingung interessieren, so müssen verglichen werden die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten, also

$$\begin{array}{ll} \text{a): } \sqrt{\lambda_2} = 2,924; & \text{b): } \sqrt{\lambda_{2,2}} = 2,93; \\ \text{c): } \sqrt{\lambda_{2,1}} = 2,98; & \text{d): } \sqrt{\lambda_{2,0}} = 3,243. \end{array}$$

Bezieht man die prozentualen Fehler auf a), so ist der Fehler im Falle b): $-0,2$ Proz., im Falle c): $-1,9$ Proz. und im Falle d): -11 Proz.!

Bei der zweiten Oberschwingung, also dritter Eigenfunktion und drittem Eigenwert wurde zunächst mit $\lambda = 33,3$ und $\lambda = 30$ unter Benutzung von 10 Intervallen die Kurve mit dem graphischen Verfahren aufgezeichnet, womit wenigstens roh der richtige Eigenwert bestimmt ist. Mit 20 Intervallen erhält man dann binnen kurzem wie bei λ_2 einen Wert $\lambda_3 = 31,4$, mit dem praktisch die Nullstelle von $D(\lambda)$ erreicht ist (vgl. Fig. 12 Kurve 2).

In Fig. 12 ist in Kurve 3 (\equiv) noch $H_{3,0} \cdot v_{3,0}$ aufgezeichnet, derart, daß $H_{3,0} \cdot v_{3,0}(1) = 3$ wird.

Das Ergebnis ist ähnlich wie oben: Die Lage der Knoten stimmt für Kurve 1 und 2 gut überein ($z_1 = 0,514$, $z_2 = 0,992$), während der erste Knoten für $v_{3,0}$ erheblich abweicht und der zweite kaum. Für höhere Eigenwerte wird übrigens der Knoten in der Nähe des Endpunktes praktisch in ihn selbst hereinfallen.

Der Vergleich der Eigenwerte bzw. der Quadratwurzeln aus ihnen ergibt folgendes:

$$\begin{array}{ll} \text{a): } \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{31,4} = 5,61 & (\text{durch graphische Integration nach Blaeß}), \\ \text{b): } \sqrt{\lambda_{3,2}} = \sqrt{31,6} = 5,62 & (\text{zweite rechnerische Annäherung}) \\ \text{c): } \sqrt{\lambda_{3,1}} = \sqrt{33,41} = 5,78 & (\text{erste " "}), \\ \text{d): } \sqrt{\lambda_{3,0}} = \sqrt{40,145} = 6,34 & (\text{nullte " "}). \end{array}$$

Bezieht man wieder die Fehler auf a), so folgt für den Fehler: im Fall b): $-0,18$ Proz.; c): $-2,85$ Proz.; d): $-12,92$ Proz.!

Man kann also *zusammenfassend* sagen:

1. Das rechnerische Verfahren liefert für die erste Annäherung in bezug auf die Eigenfunktion ein praktisch brauchbares Ergebnis (da ja von Dämpfung, endlicher Kopfmasse usw. abgesehen wurde). Diese ist für den Eigenwert um etwa 2 Proz. bzw. 3 Proz. zu groß. Die Berücksichtigung der zweiten Eigenwertänderung drückt die Abweichung im Eigenwert unter 1 Proz. herab, abgesehen von der Grundschwingung, wo die erste Annäherung schon genügt.

2. Das graphisch-rechnerische Verfahren von Prof. Dr.-Ing. Blaeß ist geeignet, in kurzer Zeit auf einfache Weise Eigenwert *und* Eigenfunktion des Problems zu bestimmen, insbesondere weil man aus der Zeichnung die Richtung der notwendigen Änderung in den Annahmen erkennt. Verkürzt wird der Weg dadurch, daß man die Rechnung heranzieht, indem man z. B. von der ersten oder auch zweiten Annäherung für den Eigenwert ausgeht.

3. Ein anderer graphischer Weg, der sonst auch bei einem solchen Eigenwertproblem beschritten wird, indem man Eigenfunktion und Eigenwert annimmt und versucht durch einfache Quadraturen — wie oben bei Kurve 5 aus 2 — festzustellen, ob man richtig gewählt hat, ist bei weitem nicht so klar, übersichtlich und empfindlich wie das Blaeßsche Verfahren, da dieses allein den Eigenwert wählen läßt und die Form der Kurve dann zwangsläufig zeichnet, und dabei erkennen läßt, in welcher Richtung eine Änderung des angenommenen Wertes vorgenommen werden muß, während man beim anderen Weg nicht so sicher sein kann.

Obwohl prinzipiell der Gedankengang derselbe ist, wurden die höheren Eigenwerte nicht berechnet, da je nach der Länge des Seils — ähnlich wie bei den Schwingungen des horizontal gespannten Seils — man die Biegesteifigkeit für die zwischen zwei Knoten liegenden Seilstücke nicht mehr vernachlässigen kann.

**d) Die Biegungsschwingungen eines Stabes
mit veränderlichem Querschnitt**

Während die bisherigen Beispiele nur von Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelten, führt das Problem der Biegungsschwingungen eines Stabes auf eine Differential-

gleichung 4-ter Ordnung, für die man auch das allgemeine Annäherungsverfahren anwenden kann, wie es hier für einen speziellen Fall geschehen soll (vgl. auch Einleitung):

1. Die Differentialgleichung des Problems

Nach Rayleigh „Theorie des Schalles“ lautet die Differentialgleichung für die kleinen, transversalen Schwingungen eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt, ohne Berücksichtigung der Dämpfung und unter der Annahme, daß die neutrale Faser des Stabes in der Ruhelage eine Gerade ist:

$$(1) \quad \mu \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0,$$

wo

$y(x, t)$ = Auslenkung des Stabes an der Stelle x zur Zeit t ,

γ = spez. Gewicht,

g = Erdbeschleunigung,

$$\mu = \frac{\gamma}{g},$$

E = Elastizitätsmodul,

F = Querschnitt,

J = äquatoriales Trägheitsmoment des Stabes bezogen auf die Querschnittsachse senkrecht zur Schwingungsrichtung,

l = Stablänge.

Macht man den Ansatz

$$(2) \quad y = u(x) \cdot \sin \omega t,$$

so erhält man für $u(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(3) \quad -\frac{\mu}{E} \cdot F \cdot \omega^2 \cdot u + \frac{d^2}{dx^2} \left(J \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = 0.$$

Diese Gleichung ist mit elementaren Funktionen lösbar, wenn z. B. J und F konstant sind oder wenn J konstant, aber

$F = \frac{C}{(x+a)^4}$ ($x < a$), was nur bei einem rechteckigen Querschnitt möglich ist.

Führt man in (3) noch statt x die neue unabhängige Veränderliche $z = \frac{x}{l}$ ein (also Reduzierung auf die Länge 1), so kann man (3) auch schreiben:

$$(4) \quad \frac{d^2}{dz^2} \left(J \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - \frac{\mu \omega^2 \cdot l^4}{E} \cdot F \cdot u = 0.$$

ω^2 ist proportional dem Eigenwert λ der Differentialgleichung. Könnte man nun die bei u^{IV} , u''' , u'' stehenden Koeffizienten darstellen durch Reihen geordnet nach Potenzen eines Parameters α , so könnte man entsprechend der Wahl der nullten Annäherung das in früheren Kapiteln behandelte Annäherungsverfahren verwenden, indem man auch λ und u in eine Reihe entwickelt, geordnet nach steigenden Potenzen von α .

Dies sei durchgeführt für einen ganz bestimmt gegebenen Querschnittsverlauf, und zwar sei betrachtet ein an einem Ende eingespannter, am anderen Ende freier Stab mit rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe h konstant sei und dessen Breite b linear mit z abnimmt. Da die Breite b dann, wenn $b(0) = b_0$ und $b(1) = b_1$, das Gesetz

$$(5) \quad b(z) = b_0 \left(1 - \frac{b_0 - b_1}{b_0} z \right) = b_0 (1 - \alpha z)$$

befolgt, kann für Gl. (4) geschrieben werden

$$(6) \quad u^{IV} - \lambda u - \frac{2\alpha}{1 - \alpha z} \cdot u'' = 0,$$

wo

$$\lambda = k^4 = \frac{12\mu\omega^2}{Eh^3} = \text{Eigenwert.}$$

Die Randbedingungen lauten:

Für $z = 0$, da feste Einspannung: $u(0) = u'(0) = 0$,
für $z = 1$, da frei schwingend:

Moment = 0, d. h. $u''(0) = 0$,
Querkraft = 0, d. h. $u'''(0) = 0$.

2. Anwendung des Näherungsverfahrens und Durchrechnung für zwei besondere Fälle

Als „ungestörte“ Gleichung, als „elementare“, sei genommen:

$$(7) \quad v_0^{IV} - \lambda_0 \cdot v_0 = 0$$

(also die Differentialgleichung für den Stab mit konstantem Querschnitt und Trägheitsmoment) mit der Lösung (nach Rayleigh a. a. O.).

$$(8) \quad v_0 = A \cdot (\cos mz - \text{Coj} mz) + B(\sin mz - \text{Sin} mz),$$

wo $m^4 = \lambda_0$ und wo vermöge der Randbedingungen für $z = 1$

$$(9) \quad \frac{A}{B} = \frac{\cos m + \text{Coj} m}{\sin m - \text{Sin} m} = - \frac{\sin m + \text{Sin} m}{\cos m + \text{Coj} m}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(9a) \quad \cos m \cdot \cos m = -1.$$

Die Lösungen dieser transzendenten Gleichung sind

$$m_1 = 0,957 \cdot \pi; \quad m_2 = 1,494 \cdot \pi; \quad m_3 = 2,5 \cdot \pi; \quad \dots;$$

$$m_n = \frac{2n-1}{2} \cdot \pi \quad (n > 2).$$

Die Normierungsbedingung, d. h. also $\int_0^1 v_0^2 \cdot dz = 1$ führt schließlich nach einigen Integrationen, bei denen wiederholt Gleichung (9a) angewandt wird, auf

$$(10) \quad v_{n,0} = (\cos m_n z - \cos m_n z) + d_n (\sin m_n z - \sin m_n z);$$

dabei ist

$$d_n = \frac{\cos m_n + \cos m_n}{\sin m_n + \sin m_n} = \frac{\sin m_n - \sin m_n}{\cos m_n + \cos m_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1).$$

Setzt man in GL (6)

$$(11) \quad \begin{cases} -\frac{2}{1-\alpha z} = t(z) \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_i, \\ u(z) = v_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i v_i(z) \quad (\text{Index } n \text{ fortgelassen}), \end{cases}$$

so findet man durch Vergleich entsprechender Potenzen von α folgendes System von Differentialgleichungen:

$$(12) \quad v_i^{IV} - \lambda_0 v_i = \sum_{k=1}^{k=i} (\varepsilon_k v_{i-k}) - t \cdot v_{i-1}'' = f_i(z), \quad i = 1, 2, \dots$$

Wie bei den allgemeinen Ableitungen unter II.a) ergibt sich mit $\int_0^1 v_i v_0 dz = 0$ und mit $\int_0^1 f_i v_0 dz = 0$ für die Eigenwertänderung die Rekursionsformel

$$(13) \quad \varepsilon_i = \int_0^1 t \cdot v_{i-1}'' \cdot v_0 dz.$$

Wenn \bar{v}_i die Lösung der Differentialgleichung (12) ist, welche die Randbedingung erfüllt, so ist $v_i = \bar{v}_i + K_i v_0$ die Gesamtlösung, wo K_i so bestimmt wird, daß $\int_0^1 v_i v_0 dz = 0$,

d. h. $K_i = - \int_0^1 \bar{v}_i v_0 dz$. Die Gleichung (12) kann man wieder

mit der Methode der Variation der Konstanten lösen. Von der so erhaltenen Funktion \bar{v}_i kann man nachweisen, daß sie die Randbedingungen erfüllt:

$$(14) \quad \bar{v}_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$

wo die C Funktionen von z sind und die y das Fundamentalsystem der Lösungen der homogenen Gleichung $v_0^{IV} + m^4 v_0 = 0$ darstellen:

$$(15) \quad y_1 = \sin mz, \quad y_2 = \cos mz, \quad y_3 = \operatorname{Sin} mz, \quad y_4 = \operatorname{Cos} mz.$$

Setzt man überdies (Einzelheiten seien übergangen):

$$(16) \quad \begin{vmatrix} y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \Delta$$

und die Unterdeterminanten von

$$y_1''', y_2''', y_3''', y_4'''$$

entsprechend gleich

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \quad (\text{Index } i \text{ fortgelassen})$$

so wird

$$(17a) \quad C_1(z) = \int_0^z \frac{\Delta_1}{\Delta} f(\zeta) d\zeta = - \frac{1}{2m^3} \int_0^z f(\zeta) y_3(\zeta) d\zeta,$$

$$(17b) \quad C_2(z) = - \int_0^z \frac{\Delta_2}{\Delta} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2m^3} \int_0^z f(\zeta) y_1(\zeta) d\zeta,$$

$$(17c) \quad C_3(z) = \int_0^z \frac{\Delta_3}{\Delta} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2m^3} \int_0^z f(\zeta) y_4(\zeta) d\zeta,$$

$$(17d) \quad C_4(z) = - \int_0^z \frac{\Delta_4}{\Delta} f(\zeta) d\zeta = - \frac{1}{2m^3} \int_0^z f(\zeta) y_2(\zeta) d\zeta.$$

Die Berechnung der Änderung der Eigenwerte und auch der Eigenfunktionen wird wesentlich von der Größe des Parameters α bzw. der Art der Zuspitzung abhängen. Wenn α sehr klein ist, so daß man für $-t(z) = \frac{2}{1-\alpha z}$ annähernd 2 setzen kann, also die höheren Potenzen von α vernachlässigt,

dann erhält man für die erste Eigenwertänderung einen einfachen Wert, nämlich

$$(18) \quad \varepsilon_1 = -2 \int_0^1 v_0''' v_0 dz = [v_0'(1)]^2,$$

oder nach einigen Umformungen mit $\frac{\varepsilon_1}{m^4} = E_1$:

$$(19) \quad E_1 = \left[\frac{2 \sin m \cdot \text{Sin } m}{m (\sin m + \text{Sin } m)} \right]^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_{n,1} = 0.$$

Mit Hilfe des oben angegebenen Weges zur Bestimmung der v_i erhält man aus der Differentialgleichung für v_1

$$(20) \quad v_1^{IV} - \lambda_0 v_1 = \varepsilon_1 v_0 + 2 v_0'''$$

folgenden Wert für v_1 :

$$(21) \quad \begin{cases} v_1 = z \cdot \frac{v_0}{2} - \frac{z \cdot E_1 m}{4} [\sin mz + \text{Sin } mz + d(\cos mz - \text{Co}f mz)] \\ + \left(\frac{3}{2m} - \frac{E_1 d}{4} \right) \cdot (\text{Sin } mz - \sin mz) + \left(K_1 - \frac{E_1}{2} \right) \cdot v_0, \end{cases}$$

oder auch

$$(22) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{v_0}{2} (z - E_1 + K_1) + \frac{1}{4} E_1 z \cdot v_0' \\ + \left(\frac{3}{2m} + \frac{E_1 d}{4} \right) (\text{Sin } mz - \sin mz). \end{cases}$$

Für die Orthogonalisierungskonstante K_1 ergibt sich ein langwieriger Ausdruck, der hier nicht weiter angegeben werden soll.

Selbstverständlich können v_1 und K_1 für jedes n und entsprechende m_n auch graphisch ermittelt werden. —

Wenn nunmehr α aber nicht mehr so klein ist, daß man $(1 - \alpha z)^{-1}$ angenähert durch 1 ersetzen kann, so könnte man entweder für $(1 - \alpha z)^{-1}$ die geometrische Reihe $\sum_{k=0} \alpha^k \cdot z^k$

setzen und so viel Glieder berücksichtigen als notwendig, dann die oben allgemein abgeleiteten Formeln für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ dementsprechend erweitern und schließlich die folgenden Integrationen graphisch oder rechnerisch — was sehr langwierig wäre — ausführen.

Oder aber man entwickelt $t(z)/2$ nicht in eine Reihe, sondern führt die in Frage kommenden Integrationen graphisch aus.

Endlich aber könnte man — wie oben bei den Längsschwingungen eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt geschehen — die Funktion ersetzen durch eine Konstante C , vermehrt um eine Funktion $r(z)$, die positives und negatives Vorzeichen annehmen kann, oder mathematisch gesprochen, man entwickelt t in eine Reihe nicht um den Punkt $z = 0$, sondern um irgendeinen anderen Punkt $0 < z < 1$, deren Anfangsglied gleich C wird. Diese Konstante C wird man so abschätzen, daß die erste Eigenwertsänderung annähernd verschwindet.

Da die Rechnungen später durch Versuche kontrolliert werden sollen, sei die Rechnung und die Abschätzung von C durchgeführt für verhältnismäßig große Parameterwerte, d. h. für stark zugespitzte Blattfedern. Es wurde gewählt:

- a) $\alpha = 0,75$, d. h. $b_1 = 0,25 b_0$,
 b) $\alpha = 1$, d. h. $b_1 = 0$.

Setzt man

$$(23) \quad \frac{2}{1 - \alpha z} = C + r(z), \quad \text{also} \quad r(z) = \frac{2}{1 - \alpha z} - C,$$

so soll C so bestimmt werden, daß $\int_0^1 r(z) \cdot v_0''' \cdot v_0 \cdot dz \approx 0$.

Eine sehr rohe Abschätzung, die nur von der Grundschwingung ausgeht und $v_{1,0}$ durch eine Gerade proportional z und $v'_{1,0}$ durch eine Gerade proportional $(1 - z)$ ersetzt, ergibt dann:

- a) $C = 3,5$ ($\alpha = 0,75$) gegenüber $C = 2$,
 b) $C = 6$ ($\alpha = 1$) „ $C = 2$.

Für die Werte $E_{n,1}$ findet man folgende Zahlen — also abhängig von α :

$$E_{1,1} = 0,6064; \quad E_{2,1} = 0,1879; \quad E_{3,1} = 0,0648; \\ E_{4,1} = 0,0331; \quad E_{5,1} = 0,02; \quad E_{6,1} = 0,015; \quad E_{7,1} = 0,01.$$

Da die Kreisfrequenz der Schwingung proportional der Quadratwurzel aus dem Eigenwert (vgl. Gl. 6), also proportional k^2 , so sind nur diese Werte bzw. k selbst im folgenden berechnet — mit $C = 3,5$ bzw. $C = 6$:

a) $\alpha = 0,75$; $C = 3,5$.

$$k_1^2 = m_1^2 \cdot \sqrt{1,795} = m_1^2 \cdot 1,3398 = 4,7; \quad k_1 = 2,168.$$

$$k_2^2 = m_2^2 \cdot \sqrt{1,243} = m_2^2 \cdot 1,1149 = 24,32; \quad k_2 = 4,9315.$$

$$k_3^2 = m_3^2 \cdot \sqrt{1,085} = m_3^2 \cdot 1,0418 = 64,267; \quad k_3 = 8,0166.$$

$$k_4^2 = m_4^2 \cdot \sqrt{1,0431} = m_4^2 \cdot 1,0213 = 123,475; \quad k_4 = 11,112.$$

$$k_5^2 = m_5^2 \cdot \sqrt{1,02625} = m_5^2 \cdot 1,0131 = 202,6; \quad k_5 = 14,234.$$

$$k_6^2 = m_6^2 \cdot \sqrt{1,0176} = m_6^2 \cdot 1,009 = 300,68; \quad k_6 = 17,355.$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_n \approx m_n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad \text{für } n \geq 6.$$

 b) $\alpha = 1$; $C = 6$.

$$k_1^2 = m_1^2 \cdot \sqrt{2,815} = m_1^2 \cdot 1,6778 = 5,8985; \quad k_1 = 2,4287.$$

$$k_2^2 = m_2^2 \cdot \sqrt{1,5638} = m_2^2 \cdot 1,2362 = 27,246; \quad k_2 = 5,2199.$$

$$k_3^2 = m_3^2 \cdot \sqrt{1,1941} = m_3^2 \cdot 1,0927 = 67,419; \quad k_3 = 8,2108.$$

$$k_4^2 = m_4^2 \cdot \sqrt{1,0992} = m_4^2 \cdot 1,0484 = 126,76; \quad k_4 = 11,259.$$

$$k_5^2 = m_5^2 \cdot \sqrt{1,06} = m_5^2 \cdot 1,0293 = 205,77; \quad k_5 = 14,345.$$

$$k_6^2 = m_6^2 \cdot \sqrt{1,0403} = m_6^2 \cdot 1,02 = 303,96; \quad k_6 = 17,451.$$

$$k_7^2 = m_7^2 \cdot \sqrt{1,03} = m_7^2 \cdot 1,015 = 424,2; \quad k_7 = 20,57.$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_n \approx m_n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad \text{für } n > 7.$$

Um vor dem Versuch zu sehen, ob dieser Weg der richtige ist, bzw. ob die C richtig bestimmt sind, wurde noch einmal graphisch für $n = 1$ und $n = 2$ sowohl für $\alpha = 0,75$ als auch für $\alpha = 1$ der Wert des Integrals

$$(24) \quad - \int_2^1 r(z) \cdot v_{n,0} \cdot v_{n,0}'' \cdot dz = \beta_n$$

bestimmt, um welchen Betrag $\varepsilon_{n,1}$ noch vermehrt werden muß. Man findet

$$a) \beta_1 = m_1^3 \cdot 0,2563; \quad b) \beta_1 = m_1^3 \cdot 1,031;$$

also

$$a) k_1^2 = m_1^2 \cdot \sqrt{1,8975} = m_1^2 \cdot 1,3777 = 4,8434; \quad k_1 = 2,201.$$

$$b) k_1^2 = m_1^2 \cdot \sqrt{3,845} = m_1^2 \cdot 1,9611 = 6,8944; \quad k_1 = 2,6252$$

und

$$a) \beta_2 = -0,135 \cdot m_2^3; \quad b) \beta_2 = +1,13 \cdot m_2^3;$$

also

$$a) k_2^2 = m_2^2 \cdot \sqrt{1,221} = m_2^2 \cdot 1,102 = 24,3; \quad k_2 = 4,9285.$$

$$b) k_2^2 = m_2^2 \cdot \sqrt{1,7068} = m_2^2 \cdot 1,306 = 28,3785; \quad k_2 = 5,3655.$$

Tabelle 1
Knoten der Feder 1 ($\alpha = 0$)

Knoten- zahl	p	Abstand des Knotens p von der Einspannstelle						
		1	2	3	4	5	6	7
1	{	0,795 0,780	—	—	—	—	experimentell theoretisch	
2	{	0,500 0,500	0,866 0,868	—	—	—		
3	{	0,346 0,356	0,632 0,644	0,908 0,906	—	—	—	—
4	{	0,264 0,280	0,486 0,500	0,700 0,724	0,928 0,927	—	—	—
5	{	0,216 0,228	0,392 0,410	0,586 0,590	0,770 0,774	0,940 0,940	—	—
6	{	0,188 0,194	0,332 0,346	0,508 0,500	0,648 0,654	0,808 0,807	0,952 0,949	—
7	{	0,158 0,167	0,290 0,300	0,430 0,433	0,556 0,567	0,696 0,700	0,834 0,834	0,966 0,956

Tabelle 2
Knoten der Federn 2 und 4 ($\alpha = 0,75$)

Knoten- zahl	p	Abstand des Knotens p von der Einspannstelle								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	{	0,700 0,685	—	—	—	—	—	—	experiment. theoretisch	
2	{	0,478 0,488	0,848 0,855	—	—	—	—	—		
3	{	0,350 0,345	0,629 0,639	0,889 0,895	—	—	—	—	—	—
4	{	0,274 0,280	0,482 0,495	0,720 0,725	0,929 0,927	—	—	—	—	—
5	{	0,218 0,224	0,398 0,408	0,577 0,585	0,764 0,770	0,934 0,922	—	—	—	—
6	{	0,184 0,194	0,346 0,346	0,490 0,500	0,650 0,654	0,800 0,807	0,946 0,949	—	—	—
7	{	0,160 0,167	0,296 0,300	0,430 0,433	0,561 0,567	0,694 0,700	0,827 0,834	0,956 0,956	—	—
8	{	0,140 0,148	0,262 0,265	0,380 0,383	0,490 0,499	0,620 0,617	0,732 0,735	0,848 0,853	0,968 0,959	—
9	{?	0,128 0,133	0,232 0,236	0,344 0,342	0,448 0,447	0,548 0,552	0,656 0,658	0,760 0,763	0,864 0,869	0,972 0,965

Tabelle 3
 Knoten der Federn 3 und 5 ($\alpha = 1$)

Knoten- zahl \ p	p	Abstand des Knotens p von der Einspannstelle									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	{	0,682 0,670	—	—	—	—	—	—	—	experim. theoretisch	
2	{	0,472 0,84 0,470 0,838	—	—	—	—	—	—	—		
3	{	0,346 0,604 0,862? 0,343 0,600 0,875	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	{	0,270 0,473 0,697 0,265 0,468 0,700	0,697 0,885	0,897 0,885	—	—	—	—	—	—	—
5	{	0,217 0,402 0,576 0,220 0,400 0,580	0,740 0,760	0,919 0,920	—	—	—	—	—	—	—
6	{	0,188 0,340 0,492 0,194 0,346 0,500	0,644 0,654	0,792 0,807	0,934 0,949	—	—	—	—	—	—
7	{	0,154 0,296 0,428 0,167 0,300 0,433	0,556 0,567	0,694 0,700	0,820 0,834	0,946 0,956	—	—	—	—	—
8	{	0,132 0,252 0,380 0,148 0,265 0,383	0,494 0,499	0,610 0,617	0,728 0,735	0,846 0,853	0,956 0,959	—	—	—	—
9	{	0,122 0,228 0,346 0,133 0,236 0,342	0,440 0,447	0,544 0,552	0,656 0,658	0,752 0,763	0,864 0,869	0,960 0,965	—	—	—
10	{	0,108 0,216 0,304 0,120 0,214 0,309	0,404 0,404	0,496 0,500	0,588 0,595	0,688 0,690	0,780 0,786	0,870 0,882	0,970 0,969	—	—

v_1 könnte nun auch auf ähnliche Weise berechnet werden; ersetzt man die störende Funktion durch C , dann sind in Gl. (22) sämtliche Summanden mit $0,5 \cdot C$ zu multiplizieren, da ja \bar{v}_1 mit $0,5 \cdot C$ zu multiplizieren und auch K_1 dementsprechend zu vergrößern ist.

Da wesentlich nur die Nullstellen von

$$u_{n,1} = v_{n,0} + \alpha \cdot v_{n,1} \approx u_n,$$

also die Knoten der Schwingung interessieren, sind nur für diese die Berechnungen durchgeführt. Dabei konnte man davon ausgehen, daß die Knoten in der Nähe derjenigen des Stabes mit konstantem Querschnitt und Trägheitsmoment liegen müssen. Die Lage der letzteren wurde von Rayleigh (a. a. O.) übernommen.

In Tab. 1 ist die Lage der Knoten — Entfernung von der Einspannstelle — für die ersten 7 Oberschwingungen,

d. h. $n = 2$ bis 8, bei einem Stab mit konstantem Querschnitt und Trägheitsmoment aufgetragen, und zwar je in der untersten Reihe. (Ungestörtes Problem!)

Entsprechend sind in Tab. 2 die Lagen der Knoten für die ersten 9 Oberschwingungen, d. h. $n = 2$ bis 10, bei dem oben behandelten Stab von $\alpha = 0,75$ zusammengestellt (nach der eben angegebenen Berechnungsart), und schließlich in Tab. 3 die Lagen der Knoten entsprechend für einen Stab von $\alpha = 1$.

Es sei dabei bemerkt, daß in Tabellen 2 und 3 von der 6. Oberschwingung an ($n = 7$, Knotenzahl = 6) die Abweichung der Werte von denen der Tab. 1, also des ungestörten Problems so gering waren, daß diese letzteren übernommen wurden.

3. Experimentelle Prüfung der Rechnung

Wird ein schwingungsfähiges, theoretisch ungedämpftes System von außen periodisch erregt, so gerät es, wenn der Takt der Erregung übereinstimmt mit dem Takte einer Eigenschwingung des Systems, in Resonanz, die Schwingungsausschläge werden sehr groß. Man kennt also mit der Resonanzdrehzahl auch die Kreisfrequenz der Eigenschwingung des Systems.

Und weiter stimmt bei einem schwingungsfähigen Kontinuum die in der Resonanzlage entstehende Schwingungsform, insbesondere hinsichtlich der Knoten überein mit der Eigenschwingungsform.

Diese Tatsachen wurden benutzt um die angenäherte Berechnung nachzuprüfen. Es wurden die erzwungenen Schwingungen von fünf verschiedenen Stäben bzw. Blattfedern untersucht. Ihre Dimensionen waren folgende:

1. $b_0 = b_1 = 20$ mm; $\alpha = 0$; $h = 0,6$ mm;
2. $b_0 = 20$ mm; $b_1 = 5$ mm; $\alpha = 0,75$; $h = 0,612$ mm;
3. $b_0 = 20$ mm; $b_1 = 0$ mm; $\alpha = 1$; $h = 0,612$ mm;
4. $b_0 = 20$ mm; $b_1 = 5$ mm; $\alpha = 0,75$; $h = 0,26$ mm;
5. $b_0 = 20$ mm; $b_1 = 0$ mm; $\alpha = 1$; $h = 0,26$ mm.

Länge sämtlicher Federn $l = 250$ mm.

Die Federn wurden elektromagnetisch erregt und zwar knapp hinter der Einspannstelle. Die Spule wurde gespeist

von einem Wechselstromgenerator, dessen Polzahl bekannt war und dessen Drehzahl jedesmal abgelesen wurde. Aus der Polzahl und der abgelesenen Drehzahl konnte dann die Kreisfrequenz der Erregung berechnet werden. Für die niederen Frequenzen stand ein anderer Wechselstromgenerator zur Verfügung. Die Grundschiwingung konnte mit keiner der beiden Maschinen erreicht werden und wurde deshalb auf mechanische Art hervorgerufen.

Die Resonanzlagen konnten verhältnismäßig genau festgestellt werden, besonders dadurch, daß man an der Reinheit des Tones und der Schärfe der Knoten die Resonanzen erkannte, was bei der mechanisch erregten Grundschiwingung nicht möglich war. Allerdings waren die Schwingungszustände bei hohen Frequenzen infolge der sehr großen Formänderungsarbeit sehr labil.

Die Kreisfrequenz der Schwingung berechnet sich aus

$$\omega = k^2 \cdot M, \quad \text{wo } M = h \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E}{12 \gamma}} \quad (\text{Materialkonstante}).$$

Nun müßte man an sich den Elastizitätsmodul E und auch das spezifische Gewicht für das betreffende Material messen und danach M bestimmen. Doch wurde hier ein anderer Weg beschritten: Aus den Versuchen über die Feder 1, aus den experimentell gefundenen Werten für die Kreisfrequenzen wurde der Mittelwert M_1 berechnet unter Einsetzen der exakten Werte k , wobei der mittlere Fehler unter 1 Proz. blieb. Die Grundschiwingung wurde ihrer Ungenauigkeit halber nicht herangezogen. Es ergab sich dann $M_1 = 13,04$, d. h. $M_1 : h_1 = 21,75$. Mit diesem Wert $M_1 : h$ konnten entsprechend auch die Konstanten M für die anderen Federn bestimmt werden, die aus gleichem Material bestanden.

Die Versuchsergebnisse hinsichtlich der Frequenzen sind in den Tabellen 4 bis 8 zusammengestellt. Dabei bedeuten in den Tabellen für die Federn mit veränderlicher Breite bei ω_{th} die zwei bzw. drei verschiedenen Werte folgendes:

In a) ist die Konstante $C = 2$ gesetzt.

„ b) „ „ „ „ $C = 3,5$ „ (bzw. $C = 6$).

„ c) ist der Wert für k_1 bzw. k_2 benutzt worden,

der infolge der Verbesserung durch die graphische Integration erhalten wurde. — Die Tabellen ergeben dann folgendes:

Tabelle 4
Kreisfrequenzen der Feder 1 ($M = 13,04$, $\alpha = 0$)

Knotenzahl	$\omega_{\text{beob.}}$ Kreisfrequenz der Erregung	$\omega_{\text{th.}}$ berechnete Kreisfrequenz	Fehler bei $\omega_{\text{th.}}$ in % von $\omega_{\text{beob.}}$
0	44,5	45,6	+ 2,5 ¹⁾
1	293	290,5	- 0,85
2	806	805	- 0,12
3	1572	1578	+ 0,4
4	2622	2608	- 0,6
5	3995	4030	+ 0,87
6	5450	5452	+ 0,04
7	7290	7230	- 0,8

Tabelle 5
Kreisfrequenzen der Feder 2 ($M = 13,3$, $\alpha = 0,75$)

Knotenzahl	$\omega_{\text{beob.}}$ Kreisfrequenz der Erregung	$\omega_{\text{th.}}$ berechnete Kreisfrequenz		Fehler bei $\omega_{\text{th.}}$ in % von $\omega_{\text{beob.}}$	
		a	b	a	b
0	66,81	57,6 c 64,42	62,5	- 13,6 c + 2,4	- 5,3 ¹⁾
1	327	306,5 c 323	323	- 6,28 c - 1,24	- 1,24
2	849	840	855	- 1,06	+ 0,7
3	1652	1631	1642	- 1,29	- 0,61
4	2700	2680	2695	- 0,74	- 0,185
5	4020	3990	4000	- 0,75	- 0,25
6	5520	5450	5450	- 1,26 ¹⁾	- 0,41
7	7320	7290	7290	- 0,41	- 0,41

Nimmt man bei der ersten und zweiten Eigenschwingung als Werte für ω die unter c) und sonst die unter b), so hat man für $\alpha = 0,75$ innerhalb der Versuchsgenauigkeit gute Ergebnisse, und wenn man berücksichtigt, daß man für den größtmöglichen Parameterwert $\alpha = 1$ nur die erste Annäherung

1) Nicht sehr ausgeprägt.

Tabelle 6

Kreisfrequenzen der Feder 3 ($M = 13,3$, $\alpha = 1$)

Knotenzahl	$\omega_{\text{beob.}}$ Kreisfrequenz der Erregung	$\omega_{\text{th.}}$ berechnete Kreisfrequenz b ¹⁾	Fehler bei $\omega_{\text{th.}}$ in % von $\omega_{\text{beob.}}$
0	93,2	78,4 c 91,7	- 15,9 c - 1,6
1	390	363 c 382	- 6,92 c - 2,05
2	921	896	+ 2,8
3	1730	1685	- 2,6
4	2765	2735	- 1,08
5	4080	4040	- 0,98
6	5660	5640	- 0,35
7	7460	7480	+ 0,97

Tabelle 7

Kreisfrequenzen der Feder 4 ($M = 5,55$, $\alpha = 0,75$)

Knotenzahl	$\omega_{\text{beob.}}$ Kreisfrequenz der Erregung	$\omega_{\text{th.}}$ berechnete Kreisfrequenz		Fehler bei $\omega_{\text{th.}}$ in % von $\omega_{\text{beob.}}$	
		a	b	a	b
0	27,76	23,8 c 26,88	26,1	- 14,3 c + 3,17	- 7,82 ²⁾
1	136,2	128	135,1	- 6,35	- 0,51
2	360	350,5	357	- 2,64	- 0,83
3	695	680	686	- 2,2	- 1,44
4	1140	1118	1128	- 1,95	- 1,07
5	1685	1652	1668	- 1,96	- 1,01
6	2315	2318		+ 0,13	
7	3120	3080		- 1,28	
8	3960	3955		- 0,50	
9	4940	4940		± 0	
10	6060	6040		- 0,33	
11	7520	7250		- 3,6 ²⁾	

1) Fall „a“ anzuführen erübrigt sich, da hier α tatsächlich seinen größten Wert erreicht hat.

2) Da die Grundschiwingung sehr tief liegt, war die Resonanz schlecht zu sehen und nicht sehr stark ausgeprägt.

3) Sehr undeutlich, kaum sichtbar, nur am Ton schwach zu erkennen.

Tabelle 8
Kreisfrequenzen der Feder 5 ($M = 5,55$, $\alpha = 1$)

Knotenzahl	$\omega_{\text{beob.}}$ Kreisfrequenz der Erregung	$\omega_{\text{th.}}$ berechnete Kreisfrequenz b ¹⁾	Fehler bei $\omega_{\text{th.}}$ in % von $\omega_{\text{beob.}}$
0	39,2	32,25 c 33,26	-17,8 ₂ -2,4
1	160	151,2 c 158	-5,56 -1,25
2	385	374	-2,34
3	725	702	-2,0
4	1160	1140	-1,72
5	1705	1682	-1,35
6	2385	2352	-1,38
7	3130	3080	-1,6
8	4020	3955	-1,62
9	5010	4940	-1,37
10	6120	6040	-1,31
11	7410(?)	7250	-2,16

berücksichtigt hat, so sind auch diese Ergebnisse — überraschenderweise — als gut zu bezeichnen. Die bei Feder 5 gegenüber Feder 3 weniger guten Ergebnisse können auch, da die Fehler sämtlich in konstanter Richtung und Größe sich bewegen, auf die etwas andere Materialkonstante zurückzuführen sein, die ja von der Feder 1 bis auf den Wert h übernommen wurde.

Vor allen Dingen sieht man, daß man durch sofortige Auswertung des Integrals

$$\varepsilon_1 = - \int_0^1 \frac{2}{1 - \alpha z} v_0 \cdot v_0''' dz$$

und Ersatz von λ durch $\lambda_0 + \alpha \varepsilon_1$ selbst bei $\alpha = 1$ praktisch brauchbare Zahlen für die Kreisfrequenz der Schwingungen erhält.

Nun zu den Schwingungsformen: Die mittels Lineal gemessenen Knotenabstände der Feder sind in den Tabellen 1, 2, 3

1) Vgl. Anmerkung 1, S. 349.

2) Resonanz nicht sehr ausgeprägt.

eingetragen — wo ja bereits die theoretisch für $C = 3,5$ bzw. $C = 6$ berechneter Knoten eingetragen sind — und zwar in Tab. 2 das Mittel der Messungen an den Federn 2 und 4 ($\alpha = 0,75$), in Tab. 3 das Mittel der Messungen an den Federn 3 und 5 ($\alpha = 1$). Ein Maß für die Meßgenauigkeit und für die Einflüsse der bei Aufstellung der Differentialgleichung nicht berücksichtigten Umstände z. B. Dämpfung, gibt Tab. 1, da hier den gemessenen Werten exakt berechnete gegenüberstehen. Übrigens machte sich der Einfluß der Dämpfung bei den höheren Kreisfrequenzen dadurch bemerkbar, daß man weniger einen Knoten als ein Knotengebiet erkannte, dessen Mittelpunkt als Knoten genommen wurde.

Auch dieses Ergebnis ist günstig, überraschend besonders bei $\alpha = 1$.

Man sieht, nebenbei bemerkt, aus der Lage der Knoten und der Lage der Eigenschwingungszahlen, daß die Werte für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0,75$ tatsächlich viel näher beieinander liegen als z. B. die für $\alpha = 0,75$ und $\alpha = 0$. —

Hrn. Prof. Dr. P. Knipping, in dessen Röntgeninstitut (Techn. Hochschule Darmstadt) die Versuche gemacht wurden, möchte ich an dieser Stelle für sein Entgegenkommen bestens danken. —

Es sei noch bemerkt, daß man an sich, nach Abspaltung von C , als ungestörtes Problem hätte auffassen können die Gleichung

$$v_0^{IV} - \alpha C v_0''' + \lambda_0 v_0 = 0,$$

welche bei günstiger Schätzung von C schon gute Werte liefern müßte. Doch ist ihre Lösung relativ umständlich und die praktische Ergiebigkeit — wie ein Zahlenbeispiel ergab — sehr gering, so daß hier von einer Durchführung abgesehen werden soll.

Allgemein sei zu dem Problem der Biegungsschwingungen noch gesagt, daß sich in entsprechender Weise das hier entwickelte Verfahren auch durchführen läßt bei nicht so einfachen Gesetzen für Querschnitt und Trägheitsmoment, wie hier angenommen. Z. B. könnte man dadurch plötzliche Querschnittsänderungen leicht erfassen. Als Ausgangsproblem wählt man jedoch zweckmäßig immer den Stab mit konstantem Querschnitt und Trägheitsmoment.

IV. Zusammenfassung

In den vorhergehenden Abschnitten wurde ein Verfahren entwickelt, das gestattet, Eigenwertprobleme, die elementar lösbaren hinreichend benachbart liegen, angenähert zu lösen; der Grundgedanke ist, daß Eigenwert λ und Eigenfunktion u_n entwickelt werden in eine Reihe geordnet nach Potenzen eines gewissen Parameters α , derart daß für $\alpha = 0$ das elementar lösbare, das sogenannte „ungestörte“ Problem entsteht mit den Eigenwerten $\lambda_{n,0}$ und den Eigenfunktionen $v_{n,0}$. Also:

$$\lambda_n = \lambda_{n,0} + \sum_{i=1} \alpha^i \varepsilon_{n,i} \quad \text{und} \quad u_n = v_{n,0} + \sum_{i=1} \alpha^i v_{n,i}.$$

Für die „Eigenwertänderungen“ $\varepsilon_{n,i}$ ergeben sich bestimmte Integrale, gewisse Rekursionsformeln und für die v_i gewisse inhomogene Differentialgleichungen, aus denen ε_i , v_i , ε_{i+1} , v_{i+1} , usw. berechnet werden können. Die v_i müssen bei unbelasteten Problemen dieselben Randbedingungen erfüllen wie u_n , während bei belasteten Problemen die v_i gewisse Randbedingungen erfüllen müssen, die nicht mit denen des ungestörten Problems übereinstimmen, sondern sich aus dem Ansatz selbst ergeben.

Das Verfahren wurde auf eine Reihe von Beispielen angewandt — in denen z. T. ganz exakt in kurzer Zeit die Lösung gefunden wurde —, insbesondere auf einige praktische Probleme der technischen Schwingungslehre. Durch Experiment und durch graphische Kontrollen konnte eine für diese Probleme hinreichende Genauigkeit festgestellt werden. — Es dürfte auch für manche andere technische Eigenwertprobleme, z. B. für die Schwingungen einer Platte mit kreisförmiger Begrenzung und veränderlicher Dicke geeignet sein, um angenäherte brauchbare Lösungen zu geben.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, Hrn. Professor Dr. A. Walther für die weitgehende Überlassung der Instrumente seines Instituts — Planimeter und Rechenmaschinen — die mir sehr große Dienste leisteten, an dieser Stelle herzlich zu danken.

(Eingegangen 2. Dezember 1930)

I
Spektr
schaltu
§ 1. M
§ 5. A
§ 1. G
3. Lin
7. Sup
11. Sil
titativ
§ 4. M
auf di

I
gaben
I
wonno
struie
sanbe
nahm
bindu
2
Gläser

1
Teil:
graphe
öffentli

**Massenspektren von Gläsern,
Salzen und Metallen nebst Konstruktion
eines Kreissmassenspektrographen**

Von **Herbert Murawkin**¹⁾

(Mit 30 Figuren)

Inhalt: I. Problemstellung. — II. Die Apparatur: § 1. Der Spektrograph; § 2. Das Vakuum; § 3. Stromschaltung; § 4. Magnetschaltung; § 5. Apparat für integrale Emission. — III. Auswertung: § 1. Magnetfeld; § 2. Heizung; § 3. Meßablesung; § 4. Korrektion; § 5. Auflösung; § 6. Graphische Berechnung. — IV. Meßergebnisse: § 1. Gang der Messung; § 2. Gläser: 1. Allgemeines, 2. Literatur, 3. Lindemannglas, 4. Alundumzement, 5. TV 95, 6. Verbrennungsglas, 7. Supremax, 8. Thüringer Glas, 9. Jenaer Glas, 10. Bleiglas (franz.), 11. Silberglas, 12. Uranglas, 13. Gesamtübersicht: a) qualitativ, b) quantitativ; § 3. Salze: 1. Aluminiumphosphat; 2. Kunsmansche Mischung; § 4. Metalle: 1. Wolfram, 2. Platin, 3. Kupfer; § 5. Ergebnisse in bezug auf die Theorie. — V. Zusammenfassung.

I. Problemstellung

Die nachstehenden Untersuchungen sollen folgende Aufgaben lösen:

1. Auf Grund der im theoretischen Teil (a. a. O.) gewonnenen Gesichtspunkte soll ein Kreisspektrograph konstruiert werden, der mit verhältnismäßig einfachen, aber sauberen apparativen Hilfsmitteln eine schnelle, exakte Aufnahme von Massenspektrogrammen auch komplizierter Verbindungen mit mehreren Bestandteilen ermöglicht.

2. Es sollen Massenspektrogramme von verschiedenen Gläsern aufgenommen werden.

1) Experimenteller Teil der Berliner Dissertation. Der theoretische Teil: „Beiträge zur Theorie und Konstruktion des Kreissmassenspektrographen“ ist in den Ann. d. Phys. [5] 8. S. 203. 1931 bereits veröffentlicht.

Durch Arbeiten von D. Prinz¹⁾, H. Cohn²⁾, J. Kahra³⁾ ist bekannt, daß Gläser in vorzüglicher Weise positive Ionen emittieren. Kahra hat insbesondere die integrale Emission von Gläsern untersucht, um festzustellen, ob die Regeln von G. C. Schmidt⁴⁾ über den Emissionsmechanismus erfüllt sind. Sie lassen sich kurz so formulieren:

a) Emittieren einheitliche feste oder flüssige Stoffe bei einer bestimmten Temperatur Ionen, so leiten sie bei dieser Temperatur elektrolytisch.

b) Emittieren sie Elektronen, so leiten sie metallisch.

c) Salze, bei denen nur positive oder negative Ionen elektrolytisch wandern, emittieren bei dieser Temperatur ausschließlich die wandernden Ionen. In der Emission überwiegen die schneller wandernden Ionen.

Daraus, daß die Gläser fast durchweg nur stark positiv emittieren, schloß Kahra auf die Bestätigung des dritten Satzes von Schmidt, der einen weitgehenden Parallelismus zwischen der Emission und der Elektrolyse annimmt. Die ausschließlich positive Emission der Gläser ist für diesen Schluß eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung.

Nach den grundlegenden Untersuchungen von E. Warburg⁵⁾, Tegetmeyer⁶⁾ und Güntherschulze⁷⁾ über die Elektrolyse des Glases wird der Elektrizitätstransport im gewöhnlichen Thüringer Glas zu etwa 91 Proz. von Na⁺- und zu 9 Proz. von K⁺-Ionen besorgt. Soll nun die Emission an die Elektrolyse gekoppelt sein, so müssen die wandernden Ionen mit den emittierten qualitativ und dem Verhältnis nach quantitativ übereinstimmen.

Andererseits hatte Königsberger⁸⁾ auf den Einfluß einer metallischen Leitung im Glas neben der elektrolytischen hin-

1) D. Prinz, Berliner Dissertation 1925.

2) H. Cohn, Ann. d. Phys. **87**. S. 543. 1928.

3) J. Kahra, Ann. d. Phys. [5] **1**. S. 135. 1929.

4) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **66**. S. 341. 1918; **72**. S. 656. 1923; **75**. S. 337. 1924; **80**. S. 588. 1926.

5) E. Warburg, Wied. Ann. **21**. S. 622. 1884.

6) E. Warburg u. F. Tegetmeyer, Wied. Ann. **35**. S. 455. 1888.

7) Güntherschulze, Ann. d. Phys. **37**. S. 435. 1912.

8) J. Königsberger, Jahrb. f. Rad. u. Elektronik **4**. S. 158. 1907.

gewiesen. Er nahm an, daß die Silikate elektrolytische Leitfähigkeit besitzen, während der Überfluß an Oxyden bei niedrigen Temperaturen äußerst schwach bei höheren Temperaturen jedoch *merklich* metallisch leitet.

H. H. Poole¹⁾ und Schiller²⁾ fanden eine Stütze für diese Anschauung in ihren Untersuchungen der Leitfähigkeit als Funktion der Feldstärke. Worauf Güntherschulze³⁾ eine Theorie der Elektronenleitung in Gläsern durch Stoßionisation entwickelte.

Wenn dem tatsächlich so ist, so müßte man in der Emission eine Überlagerung der Elektrolyse und der Stoßionisation erwarten.

Eine erschöpfende Antwort darauf kann nur aus den Spektrogrammen der Gläser entnommen werden.

3. Es sollen Massenspektren von gut positiv emittierenden Salzen, wie Aluminiumphosphat und Kunsman'sche Mischung, aufgenommen werden.

Beim Aluminiumphosphat widersprechen sich die bisherigen Messungen. Hüttemann 1917 fand Gasionen und gibt als höchst wahrscheinlich Al^+ an, während Dempster 1918 nur Na^+ und K^+ feststellen konnte.

Bei der Kunsman'schen Mischung, die als der zurzeit beste Emittent in einigen amerikanischen Arbeiten angegeben wird, fehlen Kontrollmessungen.

4. Es sollen Spektren von Platin, Wolfram und eventuell anderen Metallen aufgenommen werden.

Bei Pt handelt es sich um den Streit, ob die große Anfangsemission Wasserstoff zuzuschreiben sei und ob Pt^+ überhaupt emittiert wird. Hüttemann 1917 bejaht beides, während Barton, Harnwell und Kunsman 1926, sowie Wahlin 1929 beides verneinen und nur Alkalien finden.

Auch bei Wolfram widersprechen sich die Versuchsergebnisse. Hüttemann 1917 findet W^+ und Gasionen bei tieferen Temperaturen, während Lloyd P. Smith 1930 nur Alkalien findet und erst bei einer Temperatur über 2500°K eine reine W^+ -Emission.

1) H. H. Poole, *Nature* **107**, S. 584. 1921; *Phil. Mag.* **42**, S. 488. 1921.

2) H. Schiller, *Ann. d. Phys.* **81**, S. 32. 1926.

3) A. Güntherschulze, *Phys. Ztschr.* **24**, S. 212. 1923.

der Elektrodenhalter $B_1 B_2 B_3$, sowie der Faradaykäfig F montiert. Die Querwände haben die Stärke 2 mm, Höhe 6,75 mm, sie sind alle an die Grundplatte mit Kupfernieten genietet. Auf der Grundplatte ist der mittlere Radius $r_m = 1,4$ cm genau eingerissen und auf ihn die 8 mm-Schlitzte in den Querwänden zentriert.

Die eigentlichen *verstellbaren* Schlitzte bestehen aus je zwei 1,5 mm starken 9 mm langen Kupferplättchen von der

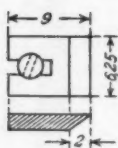


Fig. 4

Höhe der Querwände (Fig. 4). In der Mitte sind sie bis zur Hälfte eingeschlitzt, passend zu den anziehbaren Kupferschrauben, die in den Querwänden sitzen. Hierdurch ist es möglich, diese durch Verschiebung an den Schrauben die Schlitzöffnung zwischen 0 bis 5 mm zu variieren. Der erste und der dritte Schlitz sind auf den mittleren Radius zentriert, der zweite dagegen endet mit seiner Innenkante auf dem mittleren Radius. Die Enden sind scharf abgekannt, um den Schlitz möglichst geometrisch punktförmig zu gestalten.

Der Faradaykäfig F besteht aus einer geschlossenen Kupferschachtel aus 0,5 mm-Blech mit einem Schlitz von 9 mm Weite und Höhe von 5,75 mm. Der Faradaykäfig ist nur von den Querwänden umgeben. Von der Grundplatte und von oben ist er durch passende ebene 0,5 mm geschliffene Bergkristallplättchen und von den Seiten mit zwei doppelt geknickten, lose auf der Kante stehenden 1,5 mm starken Bergkristallplättchen vorzüglich, vakuumtechnisch einwandfrei isoliert. Der 0,5 mm starke Kupferableitungsdraht ist durch eine Bohrung in der hinteren Querwand durch ein isolierendes Quarzröhrchen Q geführt und an den Käfig angeschweißt. Der Käfig wird erstens durch seine Zuführung gehalten, zweitens wird über das obere Deckquarzplättchen noch ein 0,01 mm starkes Kupferplättchen von Π -Querschnitt von der Käfiggröße geschoben, so daß seine Seiten zwischen der den Käfig umgebenden Außenwand und den Seitenisulationsplättchen festgeklemmt werden.

Die Halterung der Platinelektrode vor d_1 (Fig. 5) besteht aus einem Glaswulst (G Fig. 3) aus Bleiglas, wegen des hohen Isolationsvermögens, 15 mm lang, 5 mm hoch, 8,5 mm breit.

In ihn sind von der Elektrodenseite Platindrähte $\phi = 0,6$ mm und von der anderen Seite Kupferzuleitungen $\phi = 1$ mm eingeschmolzen, so daß die Schweißstellen Platin-Kupfer im Glas liegen. Die Pt-Zuführungen sind hörnerartig auseinandergebogen, an den Enden umgebogen und breitgeklopft, hier werden die Elektrodenfolien (Fig. 7) mit ihren Seitenmitten in der Stichflamme durch Hammerschlag angeschweißt. Die Pt-Zuführungen sollen eine zu große Wärmeableitung verhindern und haben gleichzeitig eine genügende Spannkraft auch bei hohen Temperaturen, um die Folie dauernd straff zu spannen. Die Kupferzuleitungen sind mit Quarzröhrchen isoliert und am Ende D (Fig. 3) umgebogen zum Ankoppeln mit Kupferklemmschrauben an die Fortsetzung der Zuleitungen. Die beiden Klemmschrauben sind durch übergeschobene Glasröhrchen isoliert. Die Fortsetzung der Zuleitungen ist ebenfalls mit Quarzröhrchen isoliert auf dem Fortsatz C der Grundplatte befestigt, der aus 2 mm starkem und 30 mm breitem und 508 mm langem Kupferblech besteht, so daß er gerade unter der Kuppe des Schiffs handgreifbar endet. Der Fortsatz dient somit gleichzeitig als Halter und als Einsatztange.

Bei Befestigung der Zuleitungen an den Fortsatz geschieht durch Anbinden der Quarzröhrchen der Isolation an die in regelmäßigen Abstand gebohrten Doppellöcher mit 0,1 mm Kupferdraht.

Die Ableitung des Faradaykäfts, ein 0,5 mm starker Kupferdraht, ist quarzisiert durch eine enge Kupferröhre, den ganzen Fortsatz lang, durchgezogen und dadurch vor allen elektrostatischen Einflüssen geschützt.

Der Elektrodenwulst wird durch den Halterteil B_1 an der Grundplatte festgehalten (Fig. 3). B_2 ist der eigentliche Halter, es ist ein an die Grundplatte angenieteter viereckiger

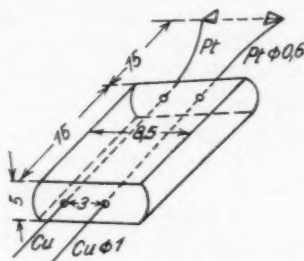


Fig. 5

Kupferblock, der eine Längsbohrung $\Phi = 3 \text{ mm}$ trägt. Die Hälfte des Blocks ist durch die Bohrung hindurch abgesägt. In die Bohrung paßt eine runde Kupferstange (K), die von der oberen Blockhälfte durch Anziehen einer Schraube festgeklemmt wird. An dem Ende B_1 der Stange sitzt ein genau so gebauter Block, der auf der Grundplatte nur aufliegt und dessen obere Hälfte, ein 1 mm starkes Blech, 15 mm zur Seite die untere Hälfte überragt und durch Anziehen einer Schraube den Glaswulst G auf die Grundplatte drückt. Der dritte Teil der Halterung ist ebenso gebaut, nur daß die untere Hälfte 20 mm zur Seite ragt und zwei Doppellöcherreihen trägt, an denen die Quarzröhrchen R und S der Zuleitungen angebunden werden können.

Da die Beschleunigungsspannung zwischen der positiven Elektrode und dem mit dem Gehäuse metallisch verbundenen ersten Schlitz liegt, wobei das ganze Gehäuse und damit die Grundplatte und das Schlitzsystem sorgfältig geerdet sind, so würden die elektrischen Kraftlinien auch nach oben und nach unten ausbiegen zu den Parallelwänden des Gehäuses. Um das zu verhindern ist ein spezieller viereckiger Kupferschutzring (V Fig. 3) Fig. 6 um die Pt-Elektrode gelegt der auf demselben Potential wie die Elektrode gehalten wird. Dieser Ring ist aus zwei Stückchen 0,1 mm Kupferblech gedrückt. Der untere Teil A hat einen Zipfel der an den rechten Pt-Zuführungsdraht angeschweißt ist. Über den Unterteil paßt ein Π -förmiger Klemmhut, der die in dem Ring berührungsfrei schwebende Elektrode von oben abdeckt. Gehalten wird er dadurch, daß die Wände von A nach außen, die Wände des Hutes aber nach innen gebogen sind. Der untere Teil A wird von der Grundplatte durch ein 0,5 mm geschliffenes Bergkristallplättchen isoliert. Die Halterung geschieht durch Einklemmen mit zwei über die Flügel von A gelegten Quarzröhrchen S unter Dazwischenschiebung von passenden Kupferplättchen. Diese Quarzröhrchen passen einerseits über die extra langen Schraubenköpfe des ersten Schlitzes und sind andererseits bei B_1 eingeklemmt bzw. bei B_3 angebunden. Die Elektrodenfläche ist bis auf 1 mm vor den Schlitz geschoben, der Ring bis auf 0,5 mm, da der Schutzring 10 mm lang ist, so ist die Elektrode auch nach hinten vollkommen abgeschirmt.

M
käftig
isoliert
nach
Leitu
anzul
überg
Pt-B

ausge
das
gestat

Stirns
teil,
ja die
Hitze
Poten
dem
Schic
Elekt

züglic
von d
Sieb
meter
das z
suche
hinde
Ionen

Die Enden der Heizstromzuführung und des Faradayaufsatzes sind aus Kupferlitze und hängen mit Quarzperlen isoliert vom Ende des Fortsatzes herunter Fig. 1 und sind nach dem Einsetzen des Einsatzes an die entsprechenden Leitungen, die von *D* herkommen, durch Klemmschrauben anzukoppeln. Auch diese Klemmverbindungen sind durch übergeschobene Glasröhren voneinander isoliert.

Die eigentliche Elektrode, Fig. 7, ist aus reinstem 0,01 mm-Pt-Blech von Heraeus, mit Stahlstempel auf Bleiunterlage

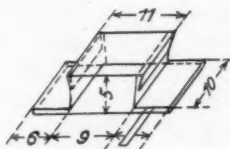


Fig. 6

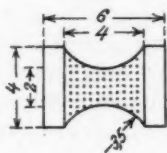


Fig. 7

ausgestanzt. Die Verengung von 2 mm in der Mitte soll nur das Glühen des wirksamen mittleren Teiles der Elektrode gestatten.

Gewöhnlich wird der zu untersuchende Stoff auf die Stirnseite der Elektrode aufgetragen. Das hat aber den Nachteil, daß 1. bei einer festen Paste die Teilchen abbröckeln, da ja die Stirnseite nach unten schaut, 2. bei Glas sich in der Hitze ein nach unten hängender Tropfen bildet, der den Potentiallinienverlauf verzerrt und eventuell Kurzschluß mit dem Schlitz herstellen kann und 3. gestattet so eine unebene Schicht nicht ein genügend parallel nahes Heranrücken der Elektrode an den ersten Schlitz.

Deshalb wurde eine *Siebanode* ausgebildet, die sich vorzüglich bewährte. Der mittlere Teil der Elektrode, Abstand von den Seitenrändern der Elektrode je 1 mm, wurde zu einem Sieb mit Hand und feiner Nähnadel, mit 5 Löchern pro Millimeter ausgestochen. Auf die Rückseite des Siebes wurde nun das zu untersuchende Glas aufgeschmolzen bzw. die zu untersuchende Paste aufgestrichen. Die Kleinheit der Löcher verhindert das Durchsickern von größeren Teilchen, nur die Ionen können hindurchgelangen. Die Intensität der heraus-

gelangten Ionen ist nun aber ebenso stark als wenn man große Sieblöcher hätte. Es ist leicht der mathematische Satz nachzuweisen, daß, wenn eine Quadratnetzfläche aus lauter aneinanderstoßenden Kreislöchern besteht, die gesamte Lochfläche unabhängig von der Lochgröße immer gleich $\pi a^2/4$ ist, wo a die Seite des Quadrates darstellt, denn sind die Löcher vom Radius $r = \frac{a}{2 \cdot n}$, so ist die Lochfläche $\pi a^2/4 n^2$, deren gibt es aber n^2 viele.

Für Glas ist die Auftragung auf die Rückseite noch von Bedeutung, weil die unteren verbrauchten Schichten durch in der Hitze absinkende frische ersetzt werden und somit zur Konstanz der Emission beitragen.

Ein Vorteil dieser Siebanode liegt darin, daß man dickere, also mechanisch festere Folien verwenden kann die aber den elektrischen Widerstand einer dünneren Folie haben. Ein Versuch, die selbst gefertigten Siebanoden durch aus Heraeusplatingewebe geschnittene zu ersetzen, ist an der mangelnden mechanischen Festigkeit gescheitert.

Die Zuleitungen der Elektrode wurden so berechnet, daß die Ableitungen an den Schweißstellen der Elektrode nicht zu groß wurden. Hatte die Elektrode Weißglut bei etwa 1550° K, so waren die Enden der Pt-Zuleitungen in Rotglut etwa 800—900° K und die mittlere Temperatur der inneren Kupferzuleitungen betrug etwa 310° K. Das Anliegen des Glaswulstes des Elektrodenhalters und der Isolationsröhrchen an Metall verhinderte durch schnelle Ableitung die Erwärmung der Leitungsdrähte und das Erweichen des Glases durch Wärmeleitung.

Der Vorteil der ganzen Anordnung liegt in der schnellen Auswechselbarkeit der vorrätigen Elektroden, in der Möglichkeit die Schlitzte und die Elektrode auf dem Tisch zu justieren und zu montieren, sowie jederzeit die Isolation zu prüfen.

§ 2. Das Vakuum

Der schnell durch äußeres Erwärmen mit Heißluftstrom abnehmbare Hochvakuumschliff E (Fig. 1) hat eine konische sich nach oben verjüngende Gestalt. In die Schlifffläche ist im Abstände von 60 mm vom oberen und 50 mm vom unteren

Rande ein Glasrohr $\phi = 10$ mm von innen eingeschmolzen, das zum Teil im Vakuumgefäß verläuft und unterhalb des Schliffes wieder austritt und mit dem Hauptpumprohr verbunden ist. Die angeschliffene Kappe hat in der Höhe des oberen Endes dieser Röhre eine Ringausbuchtung von $\phi = 10$ mm. Der Schliff ist mit einer Quecksilber gefüllten Tasse hochvakuumdicht gemacht. Die Tasse sitzt auf einer aus mehreren übereinander gezogenen Gummischlauchstücken gebildeten Unterlage.

Die Schliffkonstruktion verhindert, daß Hg-Dämpfe in die Apparatur gelangen. Die gasketische freie Weglänge beträgt für Quecksilber schon bei Drucken von 10^{-4} mm Hg einige Meter, während der Zwischenraum zwischen Schliff und Kappe höchstens 0,01 mm beträgt, so daß auf dem Wege vom unteren Rand bis zur Ringausbuchtung unzählige Reflexionen stattfinden müssen. Kommt nun doch noch etwas durch, so wird es durch das Rohr *M* abgesaugt, wo dasselbe Hochvakuum wie in der übrigen Apparatur herrscht und hinter der Ringausbuchtung ist noch der lange Weg bis zum Schliffende vorrätig und weiter der wohl kaum benutzte Weg vom Schliff bis zum Hauptpumprohr.

Vor dem Eintritt in das Evakuationsgefäß muß das Haupt- und Nebenumprohr (*M*) durch je eine mit flüssiger Luft gekühlten Ausfrier tasche (*G*) passieren, wo die Hg-Dämpfe aus den Pumpen zurückgehalten werden.

Nach den Taschen kommt ein Hg-Absperrventil, das von vorne und hinten mit Spezialsicherungen versehen ist, die ähnlich wie eine Ausfrier tasche gebaut sind. Sie sollen verhindern, daß bei irgendwelchem plötzlichen Lufteindrang von der Pump- oder Spektrographenseite her das Absperrquecksilber nicht in die Ausfrier taschen bzw. Pumpen überschlägt. Die Sicherheitstaschen enden mit kleinen Röhren, deren Spitzen leicht abzubrechen und wieder zuzuschmelzen sind, um das übergeschlagene Quecksilber wieder entfernen zu können, ohne die ganze Apparatur auseinander schneiden zu müssen.

Es folgt darauf ein Pumpaggregat bestehend aus einer zweistufigen Quarzglasdiffusionspumpe von Hanff & Buest, die über den Meßbereich des Mc Leods (10^{-6} mm Hg) und eine zweistufige Glasvorpumpe, die über 10^{-4} mm Hg zog.

Vor dem Pumpaggregat befindet sich eine Vorvakuumkugel (4200 cm^3), ein Phosphorpentoxyd-Trockengefäß und ein Anschluß an die Laboratoriumspumpleitung einer Röntgenölpumpe von Pfeiffer die $0,001 \text{ mm Hg}$ zog (Grenzvakuu 10^{-4} mm Hg).

Diese drei Pumpen ergaben binnen einer halben Stunde nach Ausheizen der Apparatur ein Vakuum von über 10^{-5} mm Hg .

Bei den Versuchen wurde immer eine Stunde vorher gepumpt bei gleichzeitiger Ausheizung des Apparategehäuses mit Gasflamme von außen.

In Meßpausen blieb die Apparatur immer unter abgesperrtem Vakuum und gekühlten Ausfrieraschen.

Das Rohr über dem engen Meßkasten wirkte wie ein ausgleichendes Hochvakuumreservoir, so daß geringe Gasabgaben des Metalls während der Messung sofort bei ihrer Entstehung abgesaugt wurden.

Das McLeod war an ein Rohr von 10 mm Weite angeschlossen, das im Hauptpumprohr in der Nähe des Evakuationsgefäßes endete (Fig. 1).

§ 3. Stromschaltung

Vgl. Schaltskizze (Fig. 8). Die Heizung der Siebanode geschah mit Hilfe von 6 großen parallel geschalteten Akkumulatoren B , die ohne weiteres einen konstanten Strom bis 12 Amp. lieferten.

Die Feinregulierung des Heizstromes geschah mit Hilfe von 3 parallelgeschalteten Schiebewiderständen R vom maximalen Widerstand $4, 10$ und 37Ω .

Als Strommesser diente ein Spiegelamperemeter von Rustrakt. Meßbereich 10 Amp. Meßgenauigkeit $1/100 \text{ Amp.}$

Die Beschleunigungsspannung wurde von einer 100 Volt -Anodenakkumulatorenbatterie S von Gorschalki & Co.

geliefert, dessen Abzapfstellen durch Stöpseln ein Abgreifen bis zu 2 Volt gestatteten.

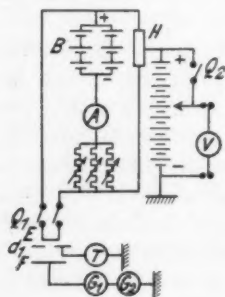


Fig. 8

Die abgegriffene Spannung wurde vor und nach jeder Messung mit einem Spiegelvoltmeter V von Gebr. Reiniger & Schall, Bereich 120 Volt, Meßgenauigkeit $\frac{1}{10}$ Volt kontrolliert.

Das positive Potential wurde der Anode über die Mitte eines 200 000 Ω -Drahtwiderstandes durch den die Heizbatterie kurzgeschlossen ist zugeführt. Dadurch wird eine gleichmäßige Verteilung des Potentials auf der Anode bewirkt, so daß die Potentiale der Heizbatteriepole keinen einseitigen subtraktiven bzw. additiven Einfluß üben.

Die von dem Faradaykäfig aufgefangenen Ionenströme wurden mit Hilfe eines hochempfindlichen Spiegelgalvanometers von Hartmann & Braun G_1 gemessen. Stromempfindlichkeit $5,5 \cdot 10^{-11}$ Amp. mm/m. Aperiodischer Zustand bei 190 000 Ω im Nebenschluß. $\frac{T}{2} = 19$ Sek. Da eine Empfindlichkeitsregulierung durch einen Airtonschen Nebenschluß nicht möglich war, da das Galvanometer dann kriecht, wurde ein zweites Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske G_2 für einen doppelt größeren Bereich dazugeschaltet. Stromempfindlichkeit 0,85 bis 10^{-9} Amp. mm/m bei 10 000 Ω Vorschaltwiderstand. Ging der Zeiger von G_1 aus der Skala heraus, so wurde an G_2 abgelesen.

Die verhältnismäßig lange Schwingungsdauer des Galvanometers störte bei den Messungen nicht, da man sowieso warten mußte, bis das Magnetfeld sich in der jeweilig neuen Magnetisierungsstufe ausgebildet hatte.

Die Galvanometerskala war 120 cm lang und hatte Millimeterteilung.

Die beiden Galvanometer waren hintereinander geschaltet auf einem Grundmauersockel montiert in 5 m Abstand von der Skala und dem Magneten.

Der effektive Meßbereich war daher für

$$G_1: 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ Amp./mm} - 1,32 \cdot 10^{-8} \text{ Amp./mm}$$

und für

$$G_2: 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ Amp./mm} - 2,04 \cdot 10^{-7} \text{ Amp./mm.}$$

Die Gesamtemission wurde der Größe und Konstanz nach mit Hilfe eines Türmchengalvanometers von Hartmann & Braun

gemessen. Stromempfindlichkeit: $2,67 \cdot 10^{-7}$ Amp./Skt. bei 750 Vorschaltwiderstand. Meßbereich:

$$2,67 \cdot 10^{-5} \text{ Amp./Skt.} - 3,204 \text{ Amp./Skt.}$$

Die Zuleitungen zum Galvanometer und Heizstromleitung wurden senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes bifilar herausgeführt. Der Abstand der Meßinstrumente betrug 5 m. Beides verhinderte Induktionswirkungen bei Änderungen des Magnetfeldes.

Zur Verhinderung von Kriechströmen wurden die Einschmelzstellen der Zuleitungen bei D (Fig. 25) mit siedender Schellack-Spirituslösung lackiert.

Der Magnethörper war zusammen mit dem Apparatgehäuse geerdet. Alle Zuleitungen wurden durch an der Decke frei hängenden Klötzern aus weißem extra reinem Paraffin von Schering geführt. Alle elektrischen Instrumente, Batterien, Regulierwiderstände waren auf durch hohle Quarzrohrfüße¹⁾ $\phi = 2$ cm isolierte Holzplatten montiert, die alle auf geerdeten Zinkblechen standen. Die Strom- und Spannungsschlüssel waren alle mit Paraffin vergossen. Die Griffe bestanden aus langen mit Paraffin gefüllten Glasröhren. Ebenso isoliert waren die Griffe der Heizstromrheostaten.

Daß die ganze Heizstromquelle und Regulierung auf der positiven Spannungsseite lag, war dadurch bedingt, daß 1. eine Isolierung des Apparatgehäuses von den Polschuhen P umständlich wäre, 2. das Interferrikum vergrößern würde und damit die Intensität und Homogenität des Feldes.

Die Ablesung der Galvanometerausschläge geschah subjektiv von dem in 5 m von der Apparatur entfernten Beobachtungs- und Schaltstandes mit Hilfe eines Fernrohres mit Fadenkreuz.

Da die Galvanometer sich über dem Stand befanden, wurden ihre Spiegelbilder nochmals an einem an der gegenüberliegenden Grundmauer befestigten Planspiegel mit versilberter Oberfläche gespiegelt und dann erst mit dem Fernrohr betrachtet. Die Vergrößerung genügte um noch $\frac{1}{2}$ mm scharf ablesen zu können.

1) Die zuerst angewandten Unterlegeklötzer aus Paraffin versagten bei feuchtem Wetter.

§ 4. Magnetschaltung

Das Apparatgehäuse war mit seinen flachen parallelen Seiten zwischen den direkt anliegenden Vollkreispolschuhen $\phi = 50$ mm montiert. Über die Polschuhe waren Ringe mit aufgelöteten dicken waagerechten Platten aus Messing geschoben (Fig. 2, quadratisch schraffiert), auf denen das Gehäuse mit seinem Teil B aufsaß. Der obere Glasteil des Apparates wurde von einem elastischen Messingring eines Messingstativs gehalten.

Jegliche Eisenteile wurden in der Nähe des Magneten peinlichst vermieden. Alle Apparateteile, die mit Stählen bearbeitet wurden, sind mit Salpeter- und Salzsäure gereinigt und fein abgeschmirgelt worden, um etwaige Stahlsplitter zu entfernen.

Der Duboisringmagnet besaß 8 Spulen und lieferte bei einem Interferikum von 12 mm auf der Peripherie des mittleren Bahnkreises $r_m = 1,5$ cm bei 12 Amp. Erregungsstrom 10325 I was zum Abtasten der gesamten Atomgewichtsskala ausreicht bei $V = 40$ Volt. Für $H = 1$, braucht man das Feld von 624,5 I und die maximale Feldstärke würde einem Element 275,5 entsprechen, das schwerer als das schwerste bekannte Element $U = 240$ ist!

Der Magnet wurde mit Gleichstrom von 220 Volt Netzspannung betrieben. Da eine kontinuierliche Stromregulierung von 0—12 Amp. notwendig war, mußte die beste Schaltung gefunden werden, bei der die Rheostaten am wenigsten Stromwärme entwickeln und wo man mit einer geringen Anzahl von Widerständen auskommt, wo die Stromwiderstandscharakteristik am wenigsten steil ist.

Die geeignetste Charakteristik erhält man bei einer Nebenschlußschaltung, so wie sie in Fig. 9 zu sehen ist. Die Anwendung der Kirchhoffschen Regeln ergibt dann für die Stromwiderstandscharakteristik des Magnetstromes:

$$(1) \quad i_m = \frac{E \cdot W_z}{(W_z + W') W_m + W' W_z},$$

wo $W_m = W'_m + W''_m$ und W''_m den Widerstand des Magneten, W'_m den Vorschaltwiderstand, W_z und W' Teilwiderstände des

Hauptschlusses und E die Betriebsspannung bedeuten. Die Gl. (1) ist von der Form

$$(2) \quad y = \frac{E}{A \cdot x + B} \quad E, A, B = \text{const.}$$

Das ist eine hyperbolische Abhängigkeit.

Würde man keinen Nebenschluß wählen, so wäre

$$(3) \quad i_m = \frac{E}{W_m}.$$

Die Steilheit ist im Nebenschluß:

$$(4) \quad \frac{d i_m}{d W_m} = - \frac{E}{A W_m^2 + 2 B \cdot W_m + \frac{B^2}{A}}$$

und in Reihenschaltung

$$(5) \quad \frac{d i_m}{d W_m} = - \frac{E}{W_m^2}.$$

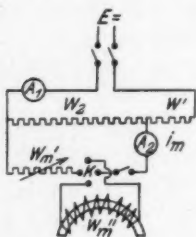


Fig. 9

Die Nebenschlußkurve hat eine geringere Steilheit, folglich ist sie günstiger.

W_z und W' wurden aus 2 mal 10 Ω -Rahmen gebildet, $W_z = 12$, $W' = 8$, W_m — bestand aus hintereinander geschalteten Rheostaten:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. 6000 Ω 0,3 Amp., | 2. 600 Ω 1 Amp., | 3. 145 Ω 2 Amp., |
| 4. 58 Ω 3,3 Amp., | 5. 30 Ω 6,5 Amp., | 6. 11 Ω 6,5 Amp., |
| 7. 6 Ω 10 Amp., | 8. 4,2 Ω 16 Amp., | 9. 10 Ω 15 Amp., |
- $W_m'' = 4,5 \Omega$.

Der letzte 10 Ω -Widerstand reguliert die Hälfte des Feldintervalls von etwa 7—12 Amp. und war deshalb 55 cm lang $\phi = 15$ cm. Die Feinregulierung geschah mit Hilfe einer handbetriebenen Zahnradübersetzung vom Übersetzungsverhältnis 1:10.

Um eine Widerstandsänderung durch Erwärmung zu verhindern war dieser Rheostat in ein wassergekühltes Petroleumbad gesteckt. Es zeigte sich nämlich sonst, daß das durch die Erwärmung der Widerstände verursachte geringe Absinken des Magnetfeldes sich merklich in einer rückläufigen Abnahme bzw. Zunahme des Ionenstromes aus dem Faradaykäfig bemerkbar machte, was eine einwandfreie Messung verhinderte.

Die Variation des Magnetfeldes wurde durch allmähliches Ausschalten von W_m — bis zur maximalen Stromstärke und dann Wiedereinschalten bis zur Stromstärke 0 bewerkstelligt, ohne Unterbrechung, da immer wieder die ganze Hysteresis-kurve durchlaufen wurde, der obere Teil im Meßlauf und der untere im Leerlauf.

Zum Kommutieren der Stromrichtung im Magneten bei $i_m = 0$ diente ein Quecksilberkommutator K .

i_m und damit \mathcal{H} wurde mit einem Präzisionsspiegelampere-meter von Ruhstrat gemessen. Meßbereich 0—12 Amp. ablesbar bis $\frac{1}{1000}$ Amp.

Der Strom im Hauptschluß wurde mit einem Amperemeter von Abraham, Meßbereich 30 Amp. ablesbar 0,1 Amp. kontrolliert.

§ 5. Apparat für integrale Emission

Um die positive integrale Emission einiger Stoffe messen zu können, wurde die Vorrichtung wie in Fig. 10 benutzt. Sie bestand aus einem 125 mm langen und 40 mm weiten Glasrohr mit einem Schliff S unten und einem Pumpansatz P an der Seite.

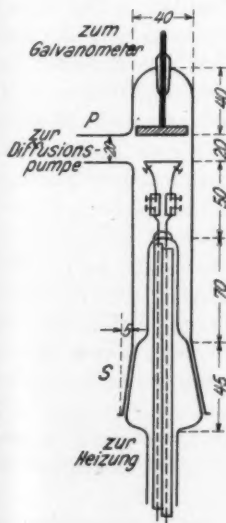


Fig. 10

Die Anode war auf einem Glasfortsatz des Hohlsliffes befestigt. Die dicken auseinandergebogenen Nidurchschmelzdrähte $\phi = 2$ mm trugen je eine Klemmschraube, die unten mit der Bohrung aufsaßen. In ihre oberen Schlitzte paßten je zwei 8 mm Breite, 25 mm lange und 0,1 mm starke Metallstreifen, der eine aus Stahlfeder, der andere aus Kupferblech. Die Streifen und die Halterklemmen

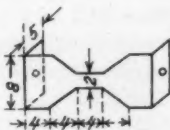


Fig. 11

wurden durch Schrauben angezogen. Die Doppelstreifen trugen am oberen Ende Löcher, durch welche die Schraubchen zur Befestigung der Anodenfolie (Fig. 11) passen. Die Stahlstreifen sorgten für die straffe Spannung der Folie, die Kupferstreifen für gute Stromleitung bei geringer Stromwärme.

Die Anodenfolie war in der Mitte auf 2 mm verengt, um das Glühen auf einen definierten Fleck zu konzentrieren. Die breiten Ränder wurden umgebogen und über die Streifenenden der Halterung gezogen und festgeschraubt. Die Folie bestand allgemein aus Platin bzw. dem Metall, welches untersucht werden sollte. Die Kathode wurde durch eine runde dicke Aluminiumscheibe gebildet.

Die Anodenheizung geschah mit Hilfe der schon in § 3 beschriebenen Akkumulatorenatterie. Die quarzrohrisolierten Litzezuführungen vertrugen bis zu 20 Amp.

Die Anodentemperatur wurde mit einem optischen Pyrometer von Siemens (System Holborn und Kurlbaum) gemessen.

Der Ionenstrom mit einem Galvanometer G_2 (§ 3) und Türmchengalvanometer bestimmt.

Die Beschleunigungsspannung bis 100 Volt lieferte die im § 3 erwähnte Anodenakkubatterie.

Die Evakuierung geschah über eine mit flüssiger Luft gekühlte Ausfrieretasche mit Hilfe einer zweistufigen Glasdiffusionspumpe von Hanff & Buest, welche ein Vakuum bis $5 \cdot 10^{-5}$ mm Hg zog. Der Anodenschliff war mit weißem Siegellack gedichtet, der wie bekannt einen äußerst niedrigen Dampfdruck hat.

III. Auswertung

§ 1. Magnetfeld

Es entsteht die Frage, ob eine Variation der Spannung bei konstantem Magnetfeld oder eine Variation des Magnetfeldes bei konstanter Spannung für die vorgesetzte Aufgabe am zweckmäßigsten ist.

Die Entscheidung hängt hauptsächlich von der Überwindbarkeit der technischen Schwierigkeiten ab, denn beide Methoden haben ihre Vorteile.

V-Variation: 1. Die Spannung ist feiner unterteilbar und genauer zu messen als ein Magnetfeld.

2. Die Messung ist kürzer, da sich das elektrische Feld momentan einstellt, während das Magnetfeld einer gewissen Anwachszeit bedarf.

3. Die genaue Reproduzierbarkeit des elektrischen Feldes ist leichter als die eines Magnetfeldes.

§-Variation: 1. Man kann in einem Meßzug, verhältnismäßig schnell das gesamte Spektrum des betreffenden Stoffes abtasten, während die Spannungsvariationen nur innerhalb von kleinen Intervallen möglich ist, für die ein jeweils passendes konstantes Magnetfeld eingestellt werden muß. Besonders bei Untersuchung unter schwankenden Emissionsverhältnissen ist das Abtasten durch Überlappung solcher Intervalle viel zu langsam und umständlich.

Ein Abtasten ohne Intervallüberlappung ist bei der V-Variation deshalb unmöglich, weil hohe, ausgedehnte, konstante Magnetfelder und hohe Spannungen benötigt werden, was weitgehende Ansprüche an Riesenmagneten mit Starkstromspeisung und die Isolation des notwendig räumlich gedrängten Spektrographen stellt. Man braucht nämlich für das höchste bekannte Atomgewicht des Urans (238,2) bei 50 Volt Beschleunigungsspannung (zur Vermeidung von Fehlern durch die Austrittsarbeit) ein konstantes Magnetfeld von 10470 I , für das kleinste Atomgewicht Wasserstoff (1,008) bei derselben Feldstärke aber eine Spannung von 11810 Volt.

2. Kommt man mit einem gewöhnlichen mittleren Dubois-elektromagneten aus der nicht dauernd maximal belastet wird, da die Feldstärke dauernd variiert wird.

Da bei der vorliegenden Aufgabe die ganze Atomgewichtsskala laufend abgetastet werden sollte auch bei inkonstanten Emittenden, mit möglichst einfachen Hilfsmitteln, so fiel die Entscheidung auf eine *§-Variation*.

Die Homogenität des Feldes wurde mit einer Probespule und ballistischem Galvanometer gemessen und zwar durch Hereinstoßen und Herausziehen der Spule¹⁾ von Millimeter zu Millimeter fortschreitend, längs des Polschuhdurchmessers. Die aufgenommene Feldstärke als Funktion des Abstandes vom

1) Die Probespule hatte einen mittleren $\Phi = 2$ mm, Länge 1 mm und etwa 35 Windungen von 0,1 mm-Cu-Draht.

Mittelpunkt zeigt Fig. 12. Die Ordinaten, die der Peripherie des mittleren Bahnkreises entsprechen, sind gestrichelt eingezeichnet.

Hieraus läßt sich die maximale Inhomogenität des Feldes auf der Schlitzbreite graphisch entnehmen.

Die Abweichung des Randes von $d_2 = 2$ mm von dem Mittelkreis¹⁾ ist 1 mm, das entspricht in der Zeichnung 0,2 Skt.

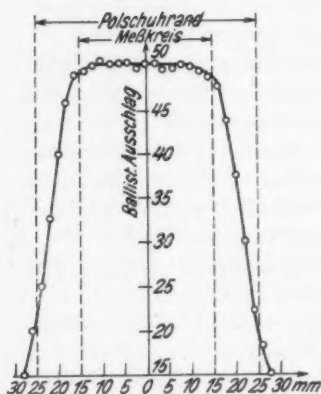


Fig. 12

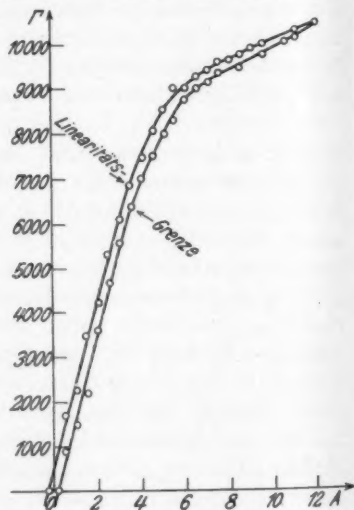


Fig. 13

Da sich für r_m 48,7 Skt. ergaben und da die ballistischen Ausschläge den Feldstärken proportional sind ergibt sich die Inhomogenität am Schlitzrande zu $0,2 / 48,7 = 0,00411$ d. h. 4,1 Promille. Da man zur Trennung von zwei am wenigsten unterscheidenden höchsten Atomgewichten von Th 232,1 und Pa (230) erst eine Auflösung von $\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\Delta A}{A} = 4,4$ Promille benötigen würde, so spielt diese Inhomogenität gar keine Rolle.

Die Eichung des Magnetfeldes wurde mit einer von der PTR. frisch kontrollgezeichneten Wismutspirale von Hartmann & Braun vorgenommen. Der Widerstand der Spirale wurde in einer

1) $r = 1,5$ cm, bezogen auf den zweiten Schlitz.

empfindlichen Wheatstoneschen Brückenschaltung mit Tümmchengalvanometer als Nullinstrument unter Berücksichtigung der Temperaturkorrektur gemessen. Bei der Eichung wurde die Mitte der Spirale auf die Peripherie des mittleren Bahnkreises im betriebsfertigen Gehäuse der Apparatur zentriert. Die Magnetisierungskurve wurde in Intervallen von 0,5 Amp. aufgenommen (Fig. 13).

Beim Einschalten durchläuft der Magnet zuerst negative Feldstärken von A ($i = 0$) bis B ($\mathfrak{H} = 0$), dann positive Feldstärken zunehmend bis E und abnehmend bis C ($i = 0$), wo kommutiert wird, dann $C \rightarrow D$ positiv, $D \rightarrow A$ negativ usw.

Die Feldstärke bei C darf nicht zu hoch sein, um noch die kleinsten Atomgewichte bis Eins herunter trennen zu können. Sie ergab sich zu 250 I , was reichlich genügt, da man zur Trennung von H und H_2 erst 624,5 I benötigte.

Die Feldumkehrpunkte B und D wurden exakt durch das Umklappen einer senkrecht symmetrisch zum Interferrikum aufgehängten Magnetnadel bestimmt.

Zur Erzeugung des variablen Magnetfeldes wäre ein Solenoid wegen der absolut linearen Abhängigkeit der Feldstärke von dem Magnetisierungsstrom günstiger, es mußte aber ein Magnet gewählt werden, da der Bau eines speziellen Riesensolenoids für solche Feldstärken einen enormen materiellen Aufwand verursacht hätte.

Als Meßkurve wurde bei dem Magneten die Hysteresekurve gewählt und nicht die jungfräuliche Kurve wie in einigen Untersuchungen von Smyth und Kennard¹⁾, weil eine genaue Reproduzierung der jungfräulichen Kurve eine jedesmal vollständige, einwandfreie Entmagnetisierung des Magneteisenkörpers voraussetzt. Bei der erheblichen Koerzitivkraft wäre das nur mit Hilfe einer zusätzlichen Vorrichtung für Wechselstromentmagnetisierung einwandfrei zu bewerkstelligen, deren Funktion aber die Apparatur und den Meßvorgang unnötig komplizieren würde.

1) H. D. Smyth u. R. B. Kennard, a. a. O. In den betreffenden Arbeiten soll der Magnet dadurch entmagnetisiert worden sein, daß bei einer geringen Magnetisierungsstromstärke die Stromrichtung mit einem Handkommutator ein paarmal gewechselt wurde. Für genauere Messungen mit größeren Magneten kann ein solch grobes Verfahren nicht ausreichen.

§ 2. Heizung

Der Heizstrom erzeugt um die Anode ein eigenes Magnetfeld das für ideale lineare Leiter $\mathfrak{H} = \frac{i}{5r}$ beträgt, wo r den Abstand des Aufpunktes und i die Stromstärke in Ampere bedeutet. Der maximale Heizstrom betrug 8,2 Amp., r war gleich dem Abstände b des ersten Schlitzes von der Anode 0,1 cm, folglich $\mathfrak{H} = 16,4$, das ergibt für 624,5 Γ zur Trennung von H 5,2 Proz., während nur eine Auflösung von 100 Proz. benötigt wird und für 9600 zur Trennung von Th $\frac{2\Delta\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}} = 1,7$ Promille, während wie in § 1 gezeigt wurde erst 4,4 Promille nötig sind, folglich ist auch dieser Fehler für die gesamte Atomgewichtsskala belanglos.

Der Heizstrom bedingt aber noch auf der Länge des kleinen Emissionsstreifens einen Spannungsabfall. Die Größe des Streifens von dem tatsächlichen Ionen in den ersten Schlitz gelangen, ist größer als die Projektion des Schlitzes auf die Anode und läßt sich nach Gl. (20), III. § 2¹⁾ berechnen.

Wir brauchen nur anzunehmen, daß das Randion am Schlitzrand senkrecht zur Grenzpotentiallinie ankommt und das Feld homogen ist, dann muß die zurückgelegte Bahnkurve dieselbe sein als ob das Teilchen von S rückwärts zur Anode geflogen sei und die maximale Abweichung des Emissionspunktes von der Projektion von Sy_s sein.

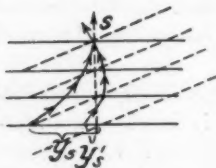


Fig. 14

Aus der Fig. 14 ist ersichtlich, daß jegliche Feldausbuchtung so wie sie beim Querdruckeffekt vorliegt y_s nur verkleinern kann. Der Ionenweg ist für eine solche Verzerrung gestrichelt gezeichnet. Die wirkliche Emissionsfläche ist also von der Länge

$$l = d_1 + 2 \cdot y_s = 0,1 + 0,01138 = 0,114 \text{ cm.}$$

Den Widerstand dieses Streifens erhalten wir, wenn wir die Sieb-
lochfläche von der Gesamtfläche abziehen. Nach II. § 1 ist die Loch-
fläche: $\frac{\pi \cdot a^2}{4}$, berücksichtigt man, daß die Zwischenräume zwischen
den einzelnen Löchern mindestens von der Lochgröße sind, so ist die
wirkliche Lochfläche $L = \frac{\pi \cdot a^2}{8}$, wo a die Seite eines Quadrates der
Gesamtfläche F ist. $F = a^2 = 0,114 \cdot 0,2 = 0,0228 \text{ cm}^2$ und $L = 0,894 \text{ cm}^2$.

1) Theoretischer Teil.

Ziehen wir die Lochfläche L von der Gesamtfläche F ab, so bleibt $F - L = 0,0139 \text{ cm}^2$.

Der Widerstand ist nun $W_t = \rho \cdot \frac{l}{q} (1 + \alpha \cdot \Delta t)$, wo ρ den spezifischen Widerstand l die Länge in Zentimetern und q den Querschnitt in Quadratzentimetern darstellt, α den Temperaturkoeffizienten und Δt die Temperaturdifferenz darstellen.

Die Breite der Widerstandsfläche ist

$$b = \frac{F - L}{l} = 0,122 \text{ cm}, \quad q = 0,01 \cdot b = 0,0012 \text{ cm}^2,$$

für Pt $\alpha = 0,0039$, $\Delta t = 1300^\circ \text{C}$ daraus $W_t = 0,61 \Omega$.

Der Spannungsabfall v ergibt sich aus $v = W_t \cdot i = 0,61 \cdot 8,2 = 0,5 \text{ Volt}$.

Die Abweichung des Potentials am Rande von dem in der Mitte ist also 0,25 Volt, d. h. etwa 6 Promille bei 42 Volt Beschleunigungsspannung, was bei der angestrebten Genauigkeit von 2 Proz. nicht wesentlich ins Gewicht fällt.

Eine Umkehrung der Richtung des Heizstromes rief keine meßbare Veränderung in der Lage der Verteilungskurven hervor.

§ 3. Meßablesung

Die Verteilungskurven wurden galvanometrisch gemessen. Es fragt sich, ob eine Skalenkorrektur der Ablesungen notwendig ist, die nicht die Auflösung betreffen würde, sondern nur die Intensität der Linien. Der Skalenabstand war $A = 500 \text{ cm}$, der Maximalausschlag $p = 60 \text{ cm}$.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{p}{A} = 0,12 \quad 2 \cdot \varphi = 6^\circ 50'$$

der Tangens und der Arcus stimmen hierbei noch auf 6,7 Promille überein, was eine Korrektur entbehrlich macht, da die Emissionsschwankungen größer sind.

Die Feldablesung geschah mit Hilfe eines Amperemeters bis $\frac{1}{100} \text{ Amp.}$ auf 12 Amp., also am Ende der Atomgewichtsskala auf 0,85 Promille¹⁾ genau und für den Anfang bei H auf

1) Da im oberen Teil die Magnetisierungskurve quadratisch von i abhängt so ist $\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{i}$ nur 0,475 Promille.

0,09 Amp. d. h. 9 Proz. genau während nur 4,4 Promille und 50 Proz. benötigt werden.

Die Ablesung des Heizstromes war bis auf $\frac{1}{100}$ Amp. genau, was bei einer Mindeststromstärke von 5 Amp. eine Konstanthaltung auf etwa 2 Promille erlaubte.

Die Temperatur der Elektrode wurde als Funktion der Heizstromstärke mit einem optischen Pyrometer von Siemens (System Holborn und Kurlbaum) aufgenommen. Es wurde dabei bei dem selben Hochvakuum gemessen wie bei den Hauptmessungen und zwar wurde die Temperatur der Untersuchungsobjekte auf der Rückseite des Siebes bestimmt. Die Temperatur war hierdurch auf 3 Proz. bestimmt.

§. 4 Korrektion

Die aufgenommenen Kurven $\eta = f(i_m)$ werden auf Maxima und Knicke und die dazugehörigen Abszissenwerte (Magnetisierungsstromstärken) in Atomgewichte umgerechnet. Die so berechneten Werte werden in der Nähe der wirklichen Atomgewichte liegen und müssen korrigiert werden.

Die Korrektion ist bedingt, nachdem im § 2 alle anderen Fehler als belanglos festgestellt wurden, 1. durch die Fehler in der Bestimmung des mittleren Radius, 2. durch Änderung der Spannung durch eventuell auftretende Kontaktpotentiale und Aufwand von Austrittsarbeit und 3. durch unvollkommene Reproduzierbarkeit der ursprünglichen Magnetisierungskurve.

Nach Gl. (56) II, § 3 (Theoretischer Teil) ist $\frac{A}{e} = c \cdot \mathfrak{H}^2$,

dabei ist $c = \frac{r_\eta \pm \Delta r_\eta}{V \pm \Delta V}$, wo Δr_η und ΔV die Fehler in der Bestimmung des häufigsten Radius r_η und der Spannung angeben. r_η ist absolut und V innerhalb gewisser Grenzen für ein und denselben Meßzug konstant, d. h. auch $c = \text{const.}$

Würde \mathfrak{H} absolut bekannt sein und hätte man ein Standardmaximum unter den Maxima der Verteilungskurven, so ließe sich c für einen ganzen Meßzug zu $c = \frac{A_1}{e} \cdot \frac{1}{\mathfrak{H}_1^2}$ bestimmen, so daß die Fehler Δr und ΔV herausfallen müßten.

Die Kontaktpotentialdifferenz Folie-Schlitz kann nur von der Temperatur und dem Vakuum abhängig sein und ist für

den ganzen Meßzug konstant, sofern es die Temperatur und der Druck sind und muß folglich als ein konstantes subtraktives bzw. additives Glied in der Spannungskorrektur erscheinen also auf jeden Fall herausfallen.

Die positiven Austrittsarbeiten sind exakt nicht bekannt, nach theoretischen Berechnungen von Güntherschulze¹⁾ schwanken sie zwischen 3,4 und 11 Volt, aber diese *unsicheren* Berechnungen, die von der genauen Kenntnis der Sublimationswärmen der betreffenden Stoffe abhängen, konnten experimentell *nicht* bestätigt werden. Kunsman²⁾ konnte bei allen seinen Untersuchungen an Alkalien und Erdalkalien, sowie an deren Gemischen nur Austrittsarbeiten von 2,04—3,41 Volt feststellen bei Temperaturen von 672—1110° K und für ein so schweres Element wie Wolfram konnte Lloyd P. Smith³⁾ aus theoretischen und praktischen Untersuchungen nur 4,33 bzw. 6,55 Volt angeben.

Für die leichteren und mittleren Atomgewichte darf man demnach eine mittlere Austrittsarbeit von etwa 2,72 Volt annehmen, die größten Abweichungen davon machen bei einer Beschleunigungsspannung von 41 Volt nicht mehr als 1,67 Proz. aus⁴⁾ und innerhalb dieser Grenzen kann auch nur eine Spannungsänderung durch die Austrittsarbeiten liegen. Bei den Gläsern besteht sogar die Wahrscheinlichkeit, daß die Grenze noch enger wird, da 1. die Gläser physikalisch zähe Flüssigkeiten sind, in denen die molekularen Bindungen schwächer sind als in festen Stoffen und 2. sich die Ionen bei hoher Temperatur vornehmlich aus der sich bildenden Oberflächendampfschicht rekrutieren und darum eine viel geringere Abtrennungsarbeit benötigen.

Es bleibt somit nur die Korrektur an der Magnetisierungskurve zu besprechen. Die Magnetisierungskurve ändert sich allgemein von Zyklus zu Zyklus, in dem sich ihr Anstieg und ihre Breite im unteren Teil ändert, was durch geringe Unter-

1) A. Güntherschulze, Ztschr. f. Phys. 31. S. 504. 1925.

2) C. H. Kunsman, Phys. Rev. 25. S. 892. 1925; 27. S. 249. 1926.

3) Lloyd P. Smith, Phys. Rev. 35. S. 381. 1930.

4) Die Auflösung ist nach Gl. (67) (Theor. Teil) in bezug auf $V: \Delta V/V$.

schiede in der Magnetisierungsdauer und Geschwindigkeit hervorgerufen wird. Der obere Teil der Kurve beim Übergang zum Sättigungsgebiet bleibt dabei unverändert. Von 0 bis 6400 I aufsteigend und von 6800 I bis 0 absteigend verläuft die Magnetisierungskurve fast linear oder außerordentlich schwach parabolisch gekrümmt. Von 6400 bis 10500 I aufsteigend und von 10500 bis 6800 I absteigend ist sie stark parabolisch.

Wäre nur eine Parallelverschiebung der Kurve vorhanden, so gilt, wenn man den unteren schwach parabolischen Teil und den oberen jeden für sich betrachtet für beide: $\mathfrak{H}^2 = c_1(i - a)$, wo $c_1 = \text{const}$, a_1 die variable Breite darstellt.

Da $A = c_2 \cdot \mathfrak{H}^2$ ist, so ist, wenn A_1 das rohe Atomgewicht und A_2 das wahre Atomgewicht bedeuten:

$$A_1 = c_1(i_1 - a_1),$$

$$A_2 = c_2(i_1 - a_2),$$

ziehen wir diese beiden Werte voneinander ab, so ergibt sich für sämtliche Atomgewichte: die Korrektur ist immer $\Delta A = \text{const}$. Und hat man einen Standard, so läßt sich diese Korrektur sofort berechnen.

Da aber allgemein die Steigung und die Spannung variieren, so wird c für das rohe und wahre Atomgewicht auch noch verschiedene Werte annehmen und die allgemeine Korrektur wird sowohl die Parallelverschiebung als auch die Änderung des Anstiegs der Magnetisierungskurve zu berücksichtigen haben.

Bedeutend A_1 und A_2 zwei wahre Atomgewichte und A_1' und A_2' die entsprechenden rohen Atomgewichte, i_1 und i_2 die zugehörigen Magnetisierungsstromstärken und a und a' die Breiten der entsprechenden Magnetisierungskurven, so gilt

$$(1) \quad A = c \cdot \mathfrak{H}^2,$$

$$(2) \quad A' = c' \cdot \mathfrak{H}'^2,$$

$$(3) \quad \mathfrak{H}_1^2 = c(i_1 - a)$$

$$(4) \quad \mathfrak{H}_1'^2 = c'(i_1 - a'),$$

$$(5) \quad A_1 = c(i_1 - a),$$

$$(6) \quad A_1' = c' \cdot (i_1 - a'),$$

$$(7) \quad A_2 = c \cdot (i_2 - a),$$

$$(8) \quad A_2' = c' \cdot (i_2 - a').$$

Eliminiert man i_1 und i_2 indem man (5) von (6) und (7) von (8) abzieht, so ergibt sich nach Zusammenfassung der Konstanten bei Annahme schwacher Parabolität:

$$(9) \quad A_1 = Q \cdot A_1' + \Delta,$$

$$(10) \quad A_2 = Q \cdot A_2' + \Delta,$$

bei Annahme einer Linearität:

$$(11) \quad \sqrt{A_1} = Q \cdot \sqrt{A_1'} + \Delta,$$

$$(12) \quad \sqrt{A_2} = Q \cdot \sqrt{A_2'} + \Delta.$$

In diesen Gleichungen sind Q und Δ die Korrektionsglieder. Kennt man zwei Maxima in diesem Gebiet, so kann man mit diesen Standards Q und Δ für einen Meßzug berechnen.

Für das stark parabolische Gebiet kommt wie schon erwähnt die Parallelverschiebung nicht in Betracht, so daß die Korrektion durch Multiplikation mit Q ausreicht.

Als Kriterien für die Wahl der Standards dienen 1. die bekannte chemische Zusammensetzung des Stoffes, das die betreffenden Linien nach früheren Untersuchungen aussendet, 2. nahe Übereinstimmung des rohen Atomgewichts mit dem Sollwert, 3. widerspruchslöse Einführung der übrigen Linien in das Spektrogramm.

In den seltenen Fällen, wo nur ein Standard im Spektrogramm vorhanden war und bei den anderen zur schnellen Orientierung wurde die Methode der sukzessiven Korrektion angewandt, welche keine Rücksicht auf die Gestalt der Magnetisierungskurve nimmt.

Ist A_1 der Standard, so ist $A_1 = c \cdot \mathfrak{H}^2$ und $A_1' = c' \cdot (\mathfrak{H}_1 + \Delta \mathfrak{H}_1)^2$, wo $\Delta \mathfrak{H}_1$ die Abweichung von der wahren Feldstärke ist. Wird nun $A_1 = Q_1 \cdot A_1'$, so ist $Q = \frac{c}{c'} \frac{\mathfrak{H}_1^2}{(\mathfrak{H} + \Delta \mathfrak{H})^2}$.

Da die Magnetisierungskurve stetig anwächst, so kann bei einem nicht zu weit entfernten Atomgewicht der Bruch

$\frac{\mathfrak{H}_1^2}{\mathfrak{H}_1 + \Delta \mathfrak{H}_1}$ nicht wesentlich verschieden von: $\frac{\mathfrak{H}_1^2}{\mathfrak{H}_1 + \Delta \mathfrak{H}_1}$ sein.

Ist $\Delta \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \right)$ dann ist

$$Q = \frac{c}{c'} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \right)},$$

woraus man ersieht, daß in der ersten Näherung Q für zwei nahe Atomgewichte gleich sein wird.

A_2 läßt sich somit bestimmen zu: $A_2 = Q_1 \cdot A_2'$. Dieser Wert stimmte mit dem durch andere Korrektionsmethoden berechneten und mit den wahren Atomgewichten innerhalb von 2 Proz. überein. Ersetzt man diesen Wert durch das wahre Atomgewicht, so läßt sich Q_2 also $A_3 = Q_2 \cdot A_3'$ berechnen usw. Ebenso kann man auch rückwärts schreiten. Die einzige Voraussetzung ist, daß die Abstände unter den Linien nicht zu groß werden.

Als Illustration für die Übereinstimmung der Werte bei den verschiedenen Korrekturen ist hier die Korrektion für Thüringer Glas Nr. 5 ausgeführt, dabei bedeuten: A' rohes Atomgewicht, A_a sukzessive Korrektion, A_b lineare, A_c schwach parabolische Korrektion, A wahres Atomgewicht. Die Standards sind fett (Tab. 1).

Tabelle 1

A'	A_a	A_b	A_c	A	
15,4	20,4	20,6	20,8	20	Ca^{40++}
17,6	23	23	23	23	Na
27,1	31,5	32,5	32,2	32	O_2^{16}
31	35,6	36,2	36	36	O_2^{18}
34	39	39	39	39	K³⁹
35	40,1	39,9	40	40	Ca^{40}
36,4	41,5	41,2	41,3	41	K^{41}
38,5	43,4	43,2	43,4	44	Ca^{44}
41	46,1	45,6	45,8	46	Na_2

Die Korrektion wurde allgemein „schwach parabolisch“ vorgenommen, wo nicht möglich „sukzessive“.

§ 5. Auflösung

Die minimale Auflösung ergibt sich angenähert von unten für unsere Apparatur, wenn $r_m = 1,5$ cm gesetzt wird nach Gl. (58) II, § 4 (Theor. Teil):

$$\nabla = \frac{2}{r_\eta} \left(r_{\max} \sqrt{1 + \frac{h^2}{\pi^2 r_n^2}} - r_\eta \right); \quad (\text{zentrische Anordnung vorausgesetzt!})$$

Für $d_1 = d_3 = 0,1$ cm, $d_2 = 0,2$ cm, $h = 0,4$ cm ist $r_{\max} = 1,5579$ cm, $r_y = 1,5008$ cm, daraus $\nabla = 8,4$ Proz.

Die effektive Auflösung war viel größer entsprechend den theoretischen Überlegungen über die exzentrische Anordnung, sie betrug mindestens 2 Proz. Alle Linien ließen sich widerspruchlos innerhalb dieser Grenzen einordnen.

Wie in § 4 gezeigt wurde, liegen auch alle Fehler der Austrittsarbeit, der Inhomogenität des Magnetfeldes, des Heizstromfeldes und Spannungsabfalles innerhalb dieser Genauigkeit.

Diese Auflösung genügt, um die Isotopen der Elemente bis etwa $A = 100$ und mancher darüber aufzulösen.

Die wirkliche physikalische Auflösung, d. h. Registrierbarkeit der Linien war bestimmt höher, so daß 2 Proz. als obere Grenze anzusehen ist.

§ 6. Graphische Berechnung

Die logarithmische Berechnung der rohen Atomgewichte $A = f(i)$ nach Formel (56) II, § 3 (Theor. Teil): $\frac{A}{e} = \frac{1}{2m_e} r_m^2 \frac{\Phi^2}{V}$ ist bei der großen Zahl der Werte langwierig und unbequem. Die vorhandenen großen Rechenschieber geben dagegen nur höchstens 4 Stellen zuverlässig wieder. Außerdem ist bei diesen Berechnungsarten die Übersicht über den Zusammenhang der 3 Variablen Φ , r_m und V erschwert.

Eine unten erläuterte Methode der Skalendarstellung¹⁾ erwies sich als anwendbar und gestattete einen Wert innerhalb von 3 Min. bis auf 5 Promille genau abzulesen ohne Rechnung.

Theorie.

A. Gesucht $\frac{A}{e} = f(\Phi, V)$. Unter A soll immer A/e verstanden werden.

$$(1) \quad A = c \cdot \frac{\Phi^2}{V} \quad c = \frac{1}{2m_H} \cdot r_m^2,$$

daraus

$$(2) \quad \lg \Phi - \lg V = \lg \frac{A}{c},$$

setzt man

$$(4) \quad \lg \Phi = x$$

1) Vgl. C. Runge, Graphische Methoden, S. 73. 1919.

und

$$(5) \quad \lg V = y,$$

so ist

$$(3) \quad 2x - y = \lg \frac{A}{c}.$$

Die Gl. (3) läßt sich als Gleichung eines Punktes der A/c -Skala in Linienkoordinaten auffassen, die wie bekannt auf parallelen X - und Y -Achse von festen Abstand aufgetragen sind (Fig. 15).

Auf die X -Achse tragen wir nun die logarithmische Φ -Skala und auf der Y -Achse die logarithmische V -Skala auf. Die Punkte der dritten A/c -Skala lassen sich dann als Schnittpunkte beliebiger zweier Geraden konstruieren, die der Gl. (3) genügen. Als diese Geraden wählen wir

$$(6) \quad x = \frac{1}{2} \cdot \lg \frac{A}{c} \quad (y = 0)$$

\overline{HC} in Fig. 15 und

$$(7) \quad y = -\lg \frac{A}{c} \quad (x = 0)$$

entspricht \overline{HD} .

Dividieren wir diese beiden Koordinaten durcheinander, so erweist sich das Verhältnis $\frac{x}{y} = \frac{1}{-2}$ als konstant für jeden beliebigen Wert, folglich die A/c -Skala auf einer zu den Achsen parallelen Geraden und und zwar da nach dem Strahlensatz $\frac{CD}{EB} = \frac{HF}{HG} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{1}$, im doppelten Abstand von der V -Skala wie die Φ -Skala, d. h. $AB = BC$.

Verbindet man nun beliebige zwei Punkte auf der Φ - und V -Skala, die den betreffenden Φ - und V -Werten entsprechen, so ergibt der Schnittpunkt dieser Geraden mit der A/c -Achse den dazugehörigen A/c -Wert.

B. Gesucht $A = f(A/c)$.

Aus Gl. (4) und (6) folgt, wenn Φ_0 die Feldstärke für $y = \lg V = 0$, d. h. für $V = 1$ bedeutet

$$(8) \quad \lg \Phi_0 = \frac{1}{2} \lg \frac{A}{c},$$

$$(9) \quad \Phi_0^2 = \frac{A}{c},$$

$$(10) \quad \lg A = 2 \lg \Phi_0 + \lg c$$

oder wenn $\lg A = \eta$, $2 \cdot \lg \Phi_0 = \xi$ und $\lg c = b$.

$$(11) \quad \eta = \xi + b,$$

das ist die Gleichung einer Geraden unter 45° Anstieg (Fig. 16). Für die verschiedenen Werte von r_m ergibt sich eine ganze Schar solcher Geraden, die sich nur durch b unterscheiden.¹⁾

C) Gesucht $A = f(i)$.

Experimentell ist die Magnetisierungskurve gegeben $\mathfrak{H} = f(i)$, auch diese läßt sich logarithmisch auftragen zwischen zwei senkrechten \mathfrak{H} -

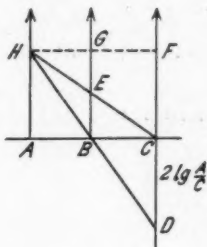


Fig. 15

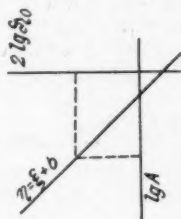


Fig. 16

und i -Skalen, so daß der Wert für \mathfrak{H} sofort ermittelt werden kann, worauf sich Verfahren A und B anschließen.

Ausführung. Fig. 17.

Trägt man auf genügend großes Doppeltlogarithmenpapier mit mindestens 3 Dekaden die V -, die \mathfrak{H} - und die A/c -Achse am bequemsten in Dekadenabstand voneinander auf und versieht die logarithmische Teilung mit entsprechenden Skalenwerten und zwar so, daß auch alle aus der Messung in Frage kommenden Skalenwertverknüpfungen ausführbar sind, zeichnet man weiter die Gerade der Gl. (11) und Fig. 16 ein, indem man die Ränder des Netzes als rechtwinklige Koordinaten benutzt und ebenso die Magnetisierungskurve, so läßt sich in einem Zug $A = f(i)$ ablesen.

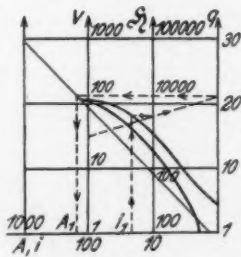


Fig. 17

1) Unter Benutzung von 4 Skalenachsen kann man die Gerade entbehren, da r auf der vierten parallelen Achse aufgetragen würde, dadurch erleidet aber die Genauigkeit und die Schnelligkeit der Ablesung.

Der Ablesungsvorgang ist in Fig. 17 durch befehlte gestrichelte Geraden verdeckt: 1. Aus der Magnetisierungskurve wird Φ abgelesen, 2. durch den so gefundenen Φ -Punkt und den Betriebsspannungspunkt wird ein Lineal gelegt und der Schnittpunkt auf der A/c -Achse gefunden. 3. An Hand der Geraden wird A/e abgelesen.

Auf der waagerechten Achse sind die i - und A -Werte aufgetragen, so daß man von dieser Achse ausgeht und auf sie wieder zurückkehrt.

Benutzt wurde ein Doppellogarithmenpapier von Schleicher & Schüll Nr. 370 $\frac{1}{2}$:8. Mantissenbereich 200 mm, 3 Dekaden.

Als Ableselineal wurde ein durchsichtiges Zelluloidlineal von 1 m Länge und abgeschrägter Kante von Gebr. Wichmann benutzt.

(Schluß folgt.)

(Eingegangen 24. November 1930)

V
8

1
9
3
1

XU